



Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Государственный университет по землеустройству»

Раздел 5. Экономика землеустройства и землепользования

Тема 5.2. Экономико-математические методы и моделирование



План лекции

1. Основные понятия моделей
2. Типы, виды и классы экономико-математических моделей, применяемых в землеустройстве
3. Методы математического программирования
4. Земельно-кадастровая информация, методы ее обработки и анализа
5. Стадии экономико-статистического моделирования
6. Требования к факторам и зависимой переменной стохастической модели
7. Производственные функции



План лекции продолжение

8 Анализ статистической выборки путём построения линии тренда

9 Методические основы применения стохастического моделирования в землеустройстве с использованием статистического пакета «PRO_FUN»

10. Стадии экономико-математического моделирования

11. Виды землеустроительных задач, решаемых симплекс-методом на ПЭВМ по программе «SIMPL»

12. Порядок решения задачи Симплекс –методом

13. Направления расширения или сужения постановки задачи



План лекции продолжение

14. Виды земельно-кадастровых задач, сводящихся к задаче линейного программирования транспортного типа

15. Порядок решения задач распределительного типа по программе « RASP».

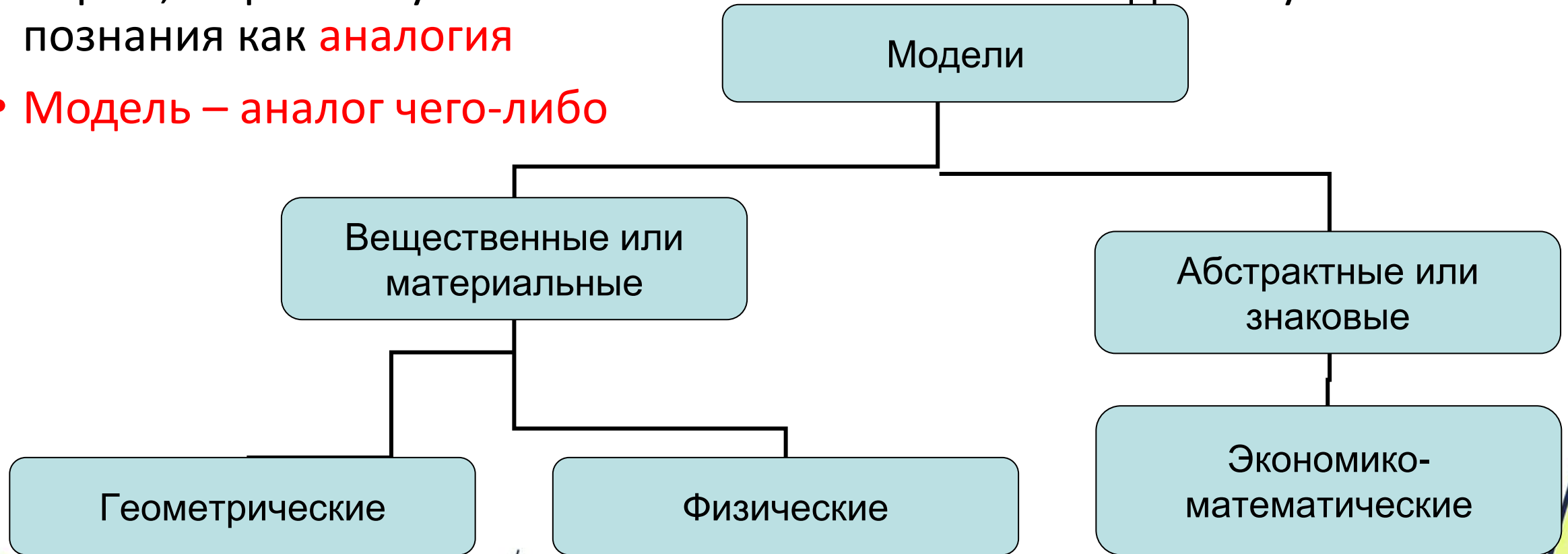
16. Интерпретация оптимального решения и его корректировка

17. Анализ оптимальных решений на основе экономической интерпретации потенциалов

18. Экспертные рекомендации по принятию решения в условиях четко определенной исходной информации и ограниченности ресурсов.

1. Основные понятия моделей

- Термин **модель** происходит от латинского слова "modulus" - образец, норма, мера. В науке это понятие связывают с методом научного познания как **аналогия**
- **Модель – аналог чего-либо**



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ представляют собой абстрактные описания объектов, явлений или процессов с помощью знаков, символов, в связи с чем такие модели иногда называют абстрактными знаковыми.

Математические модели могут иметь вид некоторой совокупности математических уравнений или неравенств, таблиц, формул и других математических конструкций. Математические модели применяют, как правило, когда геометрическое или физическое моделирование затруднено или невозможно вообще



2. Типы, виды и классы экономико-математических моделей, применяемых в землеустройстве

№ п/п	Классификационный признак	Тип (вид, класс) модели
1.	Вид проектной документации	Графические (цифровые) Экономические (числовые)
2.	Степень определенности информации	Детерминированные Стохастические
3.	Вид (форма) землеустройства или землеустроительного действия (классы моделей)	Межотраслевые Межхозяйственного землеустройства Внутрихозяйственного землеустройства Рабочего проектирования
4.	Математические методы, лежащие в основе модели	Аналитические (дифференциального исчисления) Экономико-статистические (математической статистики) Оптимизационные (математического программирования) Межотраслевого баланса (балансовые) Сетевого планирования и управления
5.	Класс проекта землеустройства	Распределяются по 37 классам проектов землеустройства



*Экономико-
математическая
модель состоит из
трех частей:*

Целевая функция

*Система ограничений,
представленных
математическими
уравнениями и
неравенствами*

*Условия
неотрицательности
переменных*



3. Методы математического программирования

Если система ограничений и целевая функция **линейны** относительно искомым величин x_1, x_2, \dots, x_n , возникает задача **линейного программирования**;

если же имеется хотя бы одно **нелинейное выражение**, мы имеем дело **с нелинейным программированием**.

Методы решения задач линейного программирования - **распределительный и симплекс-метод**

Методы решения задач стохастического программирования - **производственные функции**

Методы математического программирования

Формулировка задачи математического программирования.

1. Устанавливается перечень переменных x_1, x_2, \dots, x_n , которые могут принимать различные числовые значения.

2. На эти переменные налагается **система ограничений**.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq) b_i$$

3. Ограничениями служат уравнения или неравенства, как правило, **линейного вида**:

4. Функционал задачи или целевая функция (доход, издержки себестоимость и т.п.)

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min)$$

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_j, x_n)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \leq (\geq) 0,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m$$

5. Требуется найти такой набор неотрицательных значений переменных, который удовлетворяет системе ограничений и при котором целевая функция принимает экстремальное значение.



4. Земельно-кадастровая информация, методы ее обработки и анализа

Информация – это все данные, являющиеся объектом сбора, накопления, хранения, передачи и преобразования.

Земельно-кадастровая информация - это особый вид данных (сведений), которые характеризуют сущность землеустроительного процесса и используются для решения конкретных задач.

Требования к выборке данных. Выборка должна :

- быть однородной;
- исключать аномальные наблюдения (сильно отличающиеся от других данных);
- включать в себя факторы, которые измеряются однозначно некоторым числом или системой чисел.



Сбор и обработка исходной статистической информации посредством **экспериментального и статистического** метода

- **Сбор и подготовка статистических данных. Сплошные и выборочные наблюдения.**
- **Под генеральной совокупностью** подразумеваются сплошные наблюдения интересующего нас показателя (X).
- **Выборка объема n** - это результат наблюдения случайной величины в вероятностном эксперименте, который повторяется n раз в одних и тех же условиях (которые могут контролироваться), при неизменном распределении случайной величины X .



Получение статистических данных и их обработка

• После определения результативного показателя и факторов (x_1, x_2, \dots, x_k) необходимо провести сбор и обработку статистических данных n -пар выборки (y^j) и (x^j) , по которым будем строить производственную функцию $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

- $y^1 x^1_1 x^1_2 \dots x^1_k$
- $y^2 x^2_1 x^2_2 \dots x^2_k$
-
- $y^j x^j_1 x^j_2 \dots x^j_k$
-
- $y^n x^n_1 x^n_2 \dots x^n_k$

- где n – число пар выборки;
- j – номер выборки, меняется от 1 до n ;
- k – число факторов.



5. Стадии экономико-статистического моделирования

Экономико-статистическое моделирование осуществляется в следующем порядке:

1. **Экономический анализ, определение** зависимой **переменной** и выявление **факторов**, влияющих на ее значение.
2. Получение **статистических данных** и их обработка.
3. **Определение** математической формы связи независимых и зависимой переменных (вида **уравнения**).
4. **Определение параметров** экономико-статистической модели
5. **Оценка** степени соответствия **регрессионной модели** изучаемому процессу.
6. **Экономическая интерпретация модели**



Требования к факторам и зависимой переменной стохастической модели

1. Точность производственных функций выше при **большом числе эмпирических данных**, включаемых в расчет, при крупных выборках
2. Факторы-аргументы должны оказывать существенное влияние на производственный процесс и быть **количественно измеримы**, должны быть **представлены одним признаком** (абсолютным или относительным, натуральным или стоимостным).
3. **Число отобранных факторов** не должны быть слишком большим
4. Факторы не должны находиться между собой в состоянии функциональной связи, так как они будут косвенно дублировать друг друга.
5. За зависимую переменную принимается такой результативный показатель, который наилучшим образом аккумулирует в себе свойства изучаемого процесса и отражает его стороны и эффективность, исходя из поставленной цели, выражается с помощью **прямого показателя**, характеризующего результат производства или размер территории (урожайность культур, продуктивность угодий, площадь землепользования), или косвенного показателя (себестоимость продукции, рентабельность, прибыль).



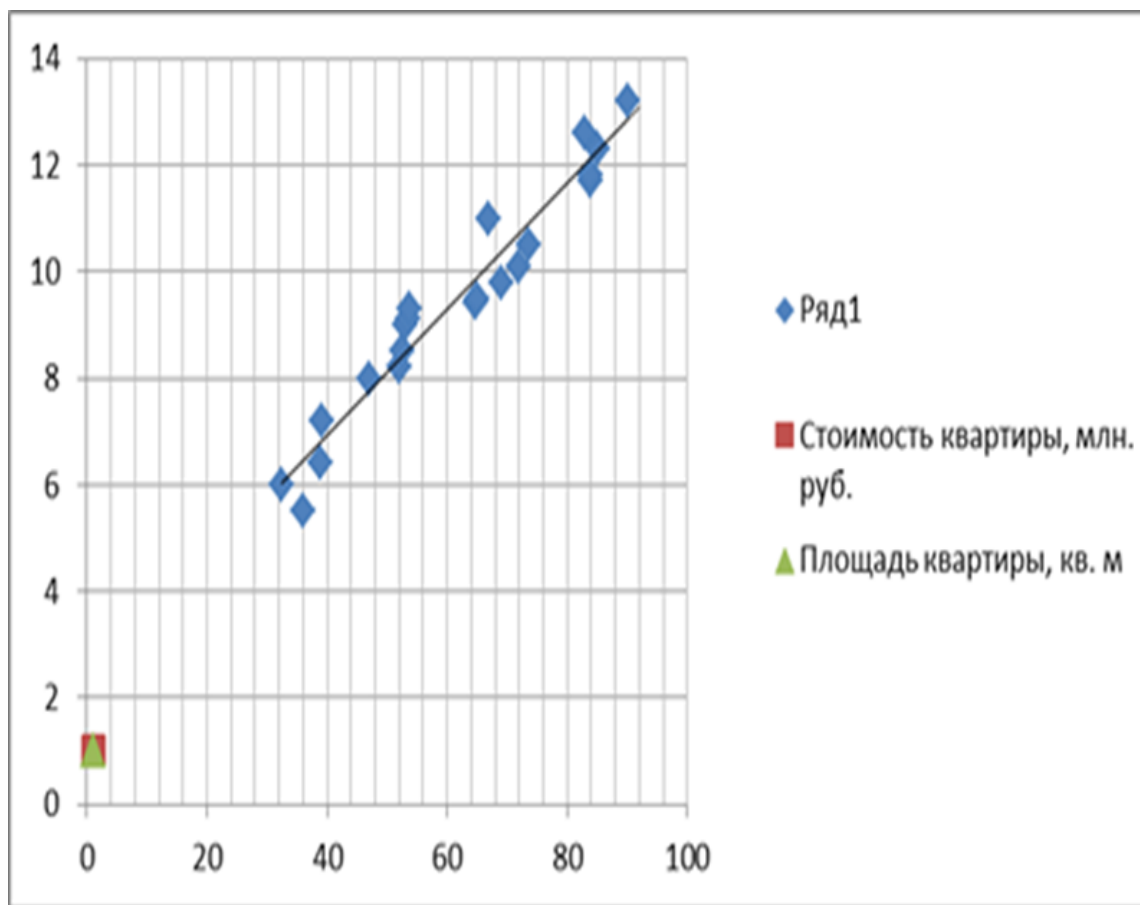
Производственные функции

Производственная функция представляет собой математически выраженную зависимость результатов производства от производственных факторов. Символически зависимость между величинами (y) и (x) выражается формулами: $y=f(x)$; функция $y=f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ – называется многофакторной. Результативный показатель производства (y) является функцией некоторых аргументов $y=f(a_1, a_2, \dots, a_L; x_1, x_2, \dots, x_k)$,

- где y – результативный показатель производства, полученный из статистической выборки набора данных;
- (a_1, a_2, \dots, a_L) – параметры - неизвестные модели;
- (x_1, x_2, \dots, x_k) - производственные факторы; причем $x \geq 0, y \geq 0$.



Анализ статистической выборки путём построения линии тренда

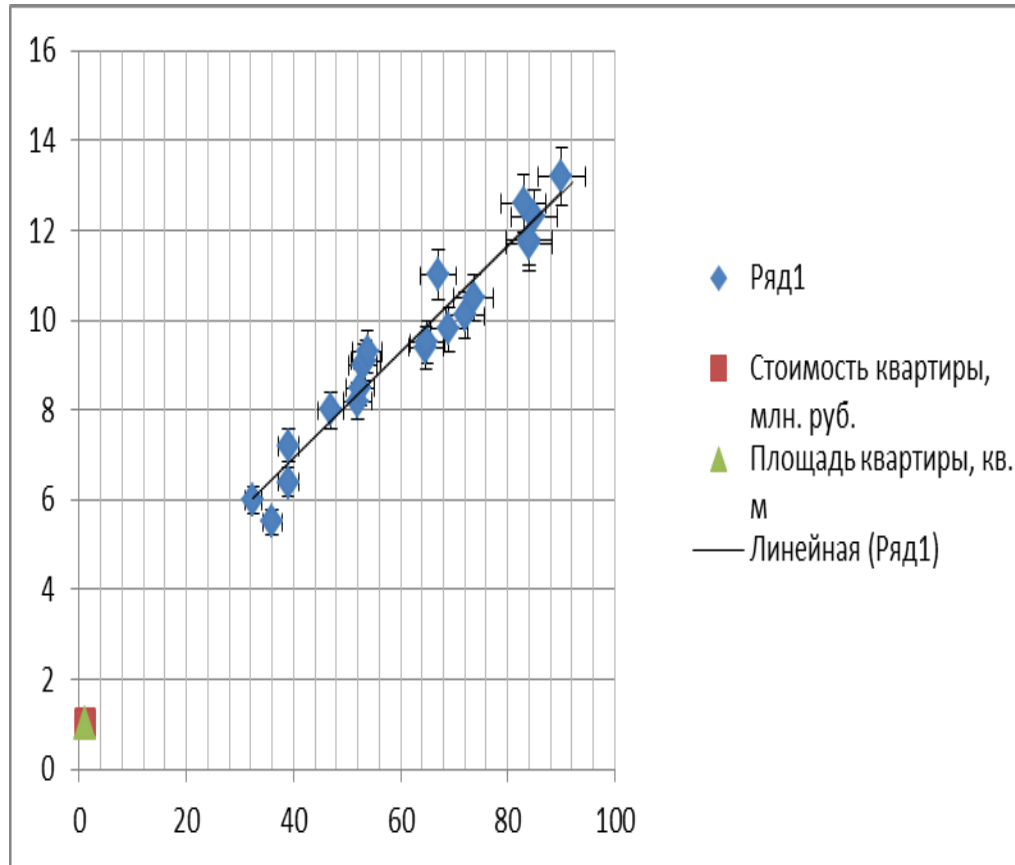


С помощью электронной таблицы Microsoft Excel строится по статистической рыночной информации о стоимости моделируемого объекта **линия тренда изменения цены от площади**, которая показывает, что **корреляционная зависимость** между рассматриваемыми парами выборки **существенна и близка к линейной**.



Анализ статистической выборки путём построения линии тренда

График планки погрешностей со стандартными ошибками



показывает коридор изменения цены в рублёвом эквиваленте, в который вошли все пары статистической выборки. **Пятипроцентные отклонения** сглаженных значений стоимости квартир от рыночных цен говорит о возможности **использования статистической информации** для прогнозных цен объекта.



Методические основы применения стохастического моделирования в землеустройстве с использованием статистического пакета «PRO_FUN»

Программа «PRO_FUN» используется для расчета параметров выбранного уравнения регрессии, а так же проводит верификацию производственной функции по основным оценочным статистическим характеристикам многомерного корреляционно-регрессионного и дисперсионного анализа.

К статистическим характеристикам, отражающим степень адекватности модели относят: корреляционное отношение (R), коэффициент определенности (детерминации) (D), среднеквадратическую ошибку модели (S_y), коэффициент вариации (C_y).

К статистическим характеристикам, определяющим статистическую значимость отдельных переменных модели относят: коэффициент корреляции (r), критерий Стьюдента и критерий F Фишера, бета-коэффициент.



Многомерный корреляционно-регрессионный и дисперсионный анализ

Корреляционно-регрессионный анализ может быть представлен двумя методами: методом **парной корреляции** и **методом множественной корреляции** (многофакторным анализом). **Парная корреляция** подразумевает выявление наличия и формы корреляционной зависимости между результативным показателем и одним из анализируемых факторных признаков $Y=f(x)$.



Коэффициент определенности (D)

- Для количественной оценки **степени тесноты связи** вычисляют коэффициент детерминации.
- В случае линейной регрессии коэффициент детерминации равен квадрату корреляционного отношения $D=R^2=r^2$.
- Коэффициент детерминации принимает значения в интервале от $[0,1]$.
- Коэффициент детерминации характеризует долю изменений величины (y), обусловленную изменением факторов (x_1, x_2, \dots, x_k). Он показывает сколько % занимает фактор в формировании результата, если $D=0.9$, то говорят, что $\sim 90\%$ изменений величины функции (y) вызвано изменением производственных факторов x_1, x_2, \dots, x_k .
- $(1-D)=10\%$ -т.е. 10% характеризует долю изменений величины (y) от влияния неучтённых факторов. Если $r=0.5$ то $D=25\%$.



Среднеквадратическая ошибка модели (S_y)

- Величина S_y представляет собой меру среднеквадратической ошибки или дисперсию регрессионной модели.

- В отличие от коэффициента D , который выражается в долях,

S_y измеряется в единицах измерения результативного показателя.

Выборочная оценка дисперсии отклонения случайной величины (y_j) от линейной регрессии равна

$$S_y^2 = D_{ост}$$

$$C_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} 100\%$$

Коэффициент вариации (C_y) –

это оценка меры достоверности уравнения регрессии; которая определяется как %-ое соотношение S_y к средней цене продажи (сделки):

Если коэффициент вариации меньше 10%, то анализируемое уравнение регрессии корректно отображает корреляционную связь и может быть использовано для расчета результата



Экономические характеристики производственных функций

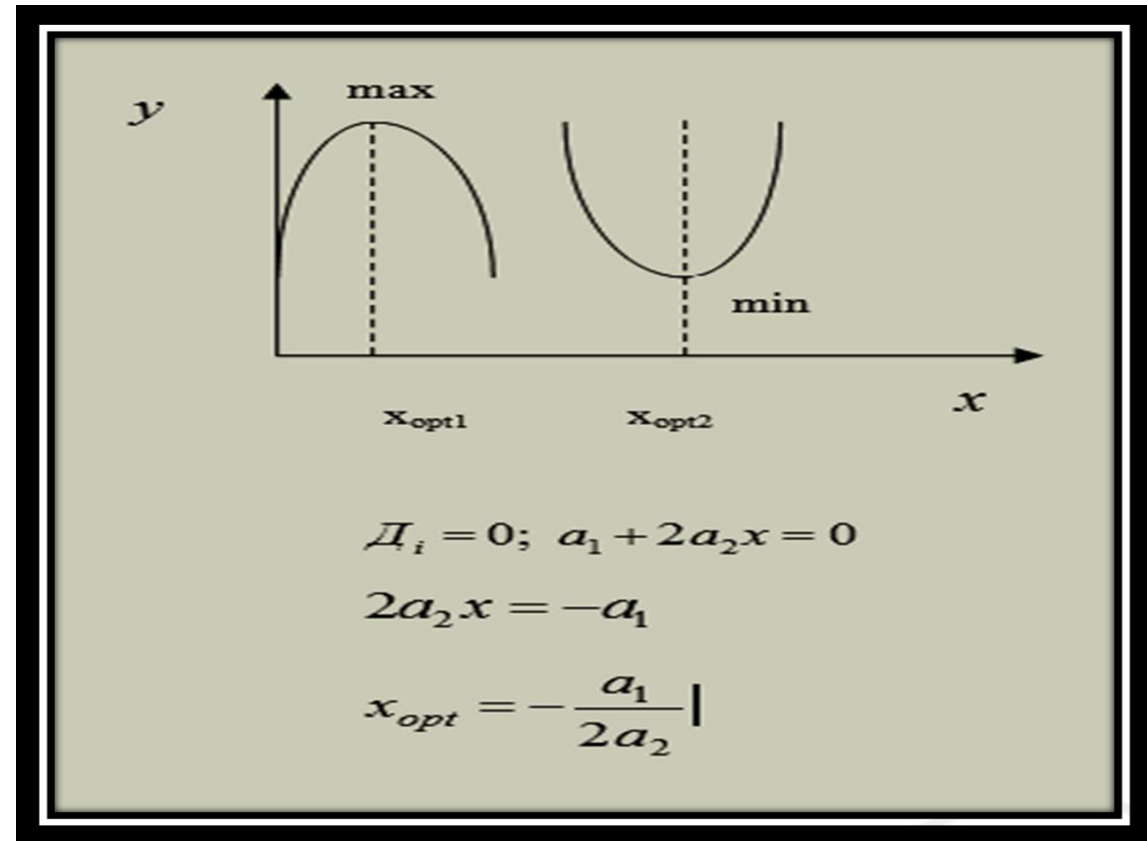
Основная область применения экономических характеристик - анализ состояния и использования земель, анализ влияния различных факторов на эффективность производства.

К экономическим характеристикам относят:
дополнительные продукты факторов или предельные производительности;
коэффициенты эластичности;
средние производительности;
предельные нормы заменяемости ресурсов.



Дополнительные продукты факторов могут быть использованы для поиска оптимальных решений. Для этого приравниваем дополнительный продукт фактора нулю $D_i = 0$ и из полученного выражения определим оптимальное значение фактора X_{opt} .

Для квадратичной параболы



Применение линейной производственной функции для планирования урожайности

№п/п	Название Хозяйства	урожай ц/га y	факторы		
			Балл x ₁	Фондообеспеченность руб/га x ₂	кол-во трудоспособ. чел/га x ₃
N		Y	X1	X2	X3

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x_1 + a_2 \sum x_2 + a_3 \sum x_3 = \sum y & (* \sum x_1) \\ a_0 \sum x_1 + a_1 \sum x_1^2 + a_2 \sum x_2 x_1 + a_3 \sum x_1 x_3 = \sum y x_1 & (* \sum x_1) \\ a_0 \sum x_2 + a_1 \sum x_1 x_2 + a_2 \sum x_2^2 + a_3 \sum x_2 x_3 = \sum x_2 y & (* \sum x_2) \\ a_0 \sum x_3 + a_1 \sum x_1 x_3 + a_2 \sum x_2 x_3 + a_3 \sum x_3^2 = \sum x_3 y & (* \sum x_3) \end{cases}$$

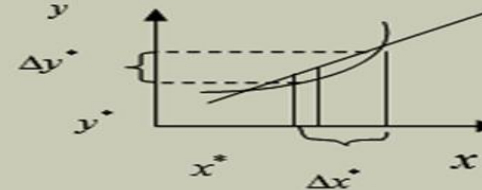
№п/п	y	x ₁	x ₂	x ₃	x ₁ ²	x ₁ x ₂	x ₁ x ₃	x ₁ y	x ₂ ²	x ₂ x ₃	x ₂ y	x ₃ ²	x ₃ y	Увыпн
лΣ														

В результате решения получилась такая зависимость $y=10,5+0,147x_1+0,0071x_2+10,524x_3$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x_1=100 \text{ балл} \\ x_2=1000 \text{ руб/га} \\ x_3=2 \text{ чел/га} \end{array} \right\} y_{\text{факт}}=10,5+14,7+7,1+21=53,3 \text{ ц/га}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1=100 \text{ балл} \\ x_2=3000 \text{ руб/га} \\ x_3=2 \text{ чел/га} \end{array} \right\} y_{\text{план}}=67,5 \text{ ц/га}$$

$$\Pi = \frac{\Delta y^*}{\Delta x^*} = \frac{y^*}{x^*}$$



Для линейной и степенной функции рассчитаем коэффициент эластичности, который характеризует относительное изменение результата производства на единицу относительного изменения i -го фактора производства.

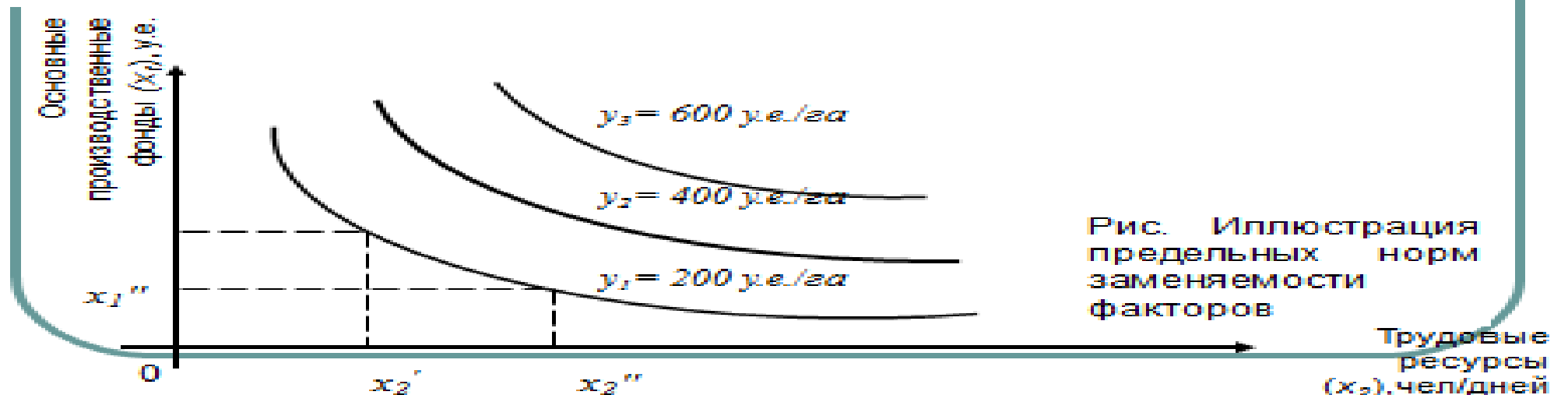
$$E = \frac{\frac{\partial y}{y}}{\frac{\partial x_i}{x_i}}$$

$y = a_0 + a_1x$	$D_i = a_1$	$\bar{\Pi}_i = \frac{a_0 + a_1x}{x}$	$E = a_1 : \frac{a_0 + a_1x}{x} = \frac{a_1x}{a_0 + a_1x}$
$y = a_0x^{a_1}$	$E = \frac{D_i}{\bar{\Pi}_i} = a_1$		
$D_i = \frac{\partial(a_0x^{a_1})}{\partial x} = \frac{a_0a_1x^{a_1-1}\partial x}{\partial x} = a_0a_1x^{a_1-1}$			
$\bar{\Pi}_i = \frac{y}{x} = \frac{a_0x^{a_1}}{x} = a_0x^{a_1-1} \quad E = \frac{a_0a_1x^{a_1-1}}{a_0x^{a_1-1}} = a_1$			



Предельная норма заменяемости ресурсов j -го фактора i -м $H_{x_i x_j}(x_1 \dots x_k)$ показывает на какую величину изменится один фактор при изменении другого фактора для получения одинакового результативного показателя.

- Изоквантами называются линии, соединяющие точки, характеризующие различные сочетания значений факторов - аргументов, при которых достигается заданное (фиксированное) значение результативного показателя



Этапы экономико-математического моделирования

Постановка
экономико-математической задачи

Математическая формулировка задачи
(составление экономико-математической модели)

Сбор исходной информации

Решение задачи

Анализ полученных результатов

Оптимизационные задачи линейного программирования. Виды землеустроительных задач, решаемых симплекс-методом на ПЭВМ по программе «SIMPL»

- определение оптимальных размеров землевладения (землепользования) хозяйства;
- оптимизация перераспределения земель сельскохозяйственных организаций и хозяйств граждан, занимающихся сельскохозяйственным производством;
- оптимизация мероприятий по освоению и улучшению использования земель;
- проектирование оптимальной трансформации угодий;
- организация системы севооборотов и оптимизация структуры посевных площадей в хозяйстве;
- проектирование комплекса противоэрозионных мероприятий в условиях развитой водной эрозии почв;
- организация территории плодовых и ягодных многолетних насаждений.



Порядок решения задачи симплекс-методом

1. Определить состав основных переменных.
2. Собрать исходную информацию.
3. Записать целевую функцию и условия (ограничения) задачи с конкретными коэффициентами и константами (ресурсами, объемами производства).
4. Перейти от стандартной формы записи задачи к канонической с определением состава дополнительных переменных.
5. Составить исходный опорный план.
6. Решить задачу симплексным методом по программе «SIMPL».
7. Осуществить анализ результатов решения и при необходимости осуществить его корректировку.



Симплекс –метод линейного программирования

За исходный или первый опорный план выбирается такое решение, при котором все **дополнительные переменные равны ресурсам**. Они составляют **базисное решение**. Все остальные переменные равны нулю.

Составленный таким образом план – наиболее простое решение системы уравнений относительно дополнительных переменных, позволяющее получить первый опорный план или базисное решение, от которого удобно начинать поиски оптимального плана.

Метод последовательного улучшения плана позволяет, начиная от первого опорного (**базисного**) плана задачи за определенное число циклически повторяющихся вычислений получить **оптимальный план**.

После каждой итерации **значение показателя качества решения задачи улучшается** с позиции **целевой установки**.

На каждой итерации **видно**, является ли полученный план оптимальным или нет. Цикл **вычислений** повторяют до получения оптимального плана.

Оптимальное решение – значения переменных, попавших в базис, находятся в столбце свободных членов и характеризуют собой ответ задачи. **Небазисные переменные равны нулю**.



Экономическая интерпретация оптимального решения

Оптимальное значение целевой функции находится в индексной строке в столбце свободных членов .

Основные переменные, попавшие в базис, характеризуют эффективные отрасли хозяйства, не попавшие в базис – характеризуют отрасли, развитие которых нецелесообразно

Остаточные переменные, попавшие в базис, показывают на наличие соответствующих ресурсов, они не дефицитны.

Остаточные переменные, не попавшие в базис (равны нулю), показывают, данные ресурсы исчерпаны полностью – они дефицитные.

Двойственные оценк - значения элементов индексной строки, соответствующих остаточным и избыточным переменным.

Коэффициенты замещения – коэффициенты структурных сдвигов, размещаемые по строкам и столбцам таблицы, необходимы для корректуры решения.

Избыточные переменные, попавшие в базис, характеризуют перевыполнение плана продукции, не вошедшие в базис - что план производства продукции строго выполняется.



Направления расширения или сужения постановки рассматриваемой задачи

Корректировка оптимального плана, может возникнуть в случае, когда появилась возможность предусмотреть развитие отраслей за счет дополнительно привлекаемых ресурсов, появившихся после решения задачи или возникла необходимость развития отрасли, не вошедшей в базисное решение.

- **Дополнительные изменения** можно вносить в **оптимальный план** до тех пор, пока любая из **базисных переменных** не получит **нулевого значения**.
- Это произойдет в случае, если какой-либо **недоиспользованный ресурс** будет **полностью исчерпан** или **ликвидирована отрасль**, за счет которой происходит **развитие вводимой переменной**.



Виды земельно-кадастровых задач, сводящихся к задаче линейного программирования транспортного типа:

- определение оптимальных маршрутов перевозок грузов
- устранение чересполосицы, вкрапливаний и других недостатков землевладения и землепользования;
- рациональное размещение культур на участках различного плодородия (например, установление состава культур в севооборотах при известном размещении последних).
- оптимальное размещение угодий и севооборотов на различных по качеству и местоположению участках с уточнением намеченной трансформации.
- оптимизация размещения культур по участкам различного плодородия земель (эродированности земель)
- установление сырьевых зон перерабатывающих заводов



Распределительный метод

- **Распределительный метод**, в основе которого лежит транспортная модель линейного программирования, является **детализацией симплекс-метода** применительно к задачам, предполагающим **распределение определенного количества однородного ресурса между потребителями**.
- Так же как и в **симплекс-методе**, алгоритм **распределительного метода** позволяет, начиная от первого опорного плана, **за определенное число итераций** получить **оптимальное решение задачи**.



Порядок решения задач распределительного типа

Постановка задачи с формулировкой цели.

Сбор исходной информации и ее обработка.

Заполнение исходной матрицы и составление первоначального опорного плана.

Вычисление цены плана и анализ плана на оптимальность.

Последовательное улучшение плана до получения оптимального решения на ПЭВМ по программе « RASP ».

Интерпретация оптимального решения

При использовании матрицы оптимального плана можно производить следующие действия.

- Находить новое альтернативное решение.
- Находить новое решение с изменением (отклонением от экстремального) значения целевой функции.

Условием наличия альтернативных решений является выполнение для свободных клеток следующего равенства:

$$\sum_{ij} = (\alpha_i + c_{ij}) - \beta_j = 0$$

Для получения альтернативного решения для свободной клетки, оценка в которой равна нулю, строится цикл с перемещением доли плана в свободную клетку.



Корректировка решений при изменении уровня производства и потребления ресурса отдельными поставщиками и потребителями

- Изменение запасов и потребностей в отдельных пунктах при сохранении общего объема производства
- перераспределение ресурсов между пунктами отправления или потребления.
- могут возникнуть случаи, требующие ограничить объемы перевозимых грузов по различным маршрутам или, наоборот, увеличить грузооборот.
- корректировка оптимального плана может проявляться в случае, если надо учесть дополнительные условия, возникшие после окончания решения задачи.

$$x_{ij} = d_{ij} \quad x_{ij} \geq D_{ij} \quad x_{ij} \leq d_{ij} \quad d_{ij} \leq x_{ij} \leq D_{ij}$$

- При перераспределении грузов между занятой и свободной клеткой, т. е. при организации нового маршрута.



Анализ оптимальных решений на основе экономической интерпретации потенциалов

- На **основании анализа потенциалов** устанавливаем **мощности** какого поставщика и потребителя нужно **увеличить** или **уменьшить**, после увеличения (уменьшения) запаса и потребности решить задачу на ЭВМ.
- Для **уменьшения объема производства** при решении на min необходимо уменьшить поставку в клетке с максимальной оценкой

$$C_{\max} = \beta_{\max} - \alpha_{\min}$$

- **Увеличение объема производства** при решении на min в клетке с минимальной оценкой уменьшаем поставку

$$C_{\min} = \beta_{j\min} - \alpha_{i\max}$$



Экспертные рекомендации по принятию решения в условиях четко определенной исходной информации и ограниченности ресурсов

Математические методы **позволяют** находить наиболее **целесообразные решения** по перераспределению, использованию и охране земельных ресурсов, начиная от конкретных сельскохозяйственных предприятий до народного хозяйства в целом.

- **Оптимальные планы** использования производственных ресурсов, связанных с землей, **способствуют** достижению заданных объемов производства при **минимальных затратах труда и средств** (повышается производительность труда, ускоряются темпы воспроизводства в хозяйствах). **Внедрение математических методов и вычислительной техники в землеустройство** позволит **перестроить всю систему землеустроительного проектирования, организации планирования землеустроительных работ, освободить значительное количество квалифицированных работников от малопродуктивного труда** и с большей пользой **использовать их для решения практических задач организации рационального использования и охраны земель в России.**

