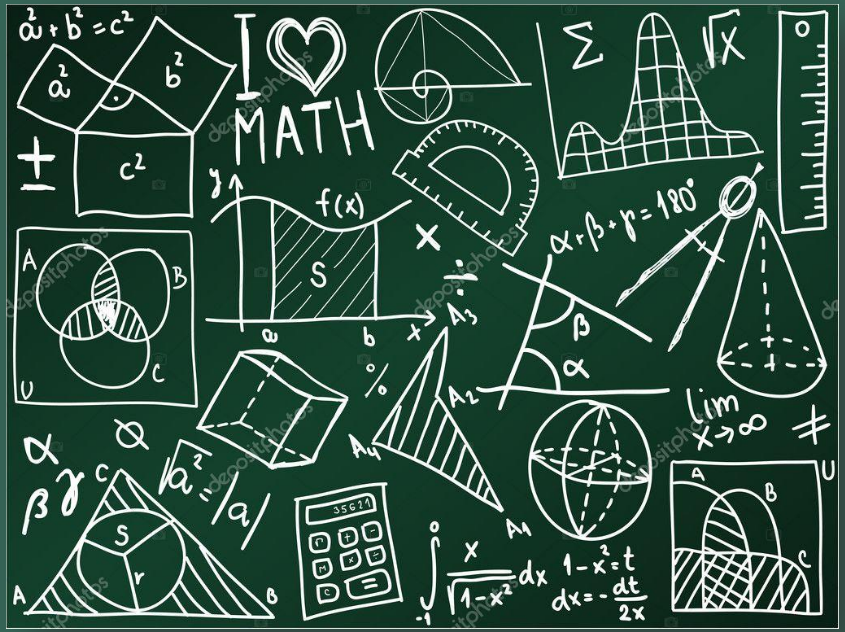
ФГБОУ ВО «ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ»

КАФЕДРА ГЕОДЕЗИИ И ГЕОИНФОРМАТИКИ

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

## ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ, ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ФУНКЦИЙ




АВТОР: К.Т.Н., ДОЦ. А.И. ДАНИЛОВИЧ

# СОДЕРЖАНИЕ

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- ***Математическое ожидание результата (геодезических) измерений; M[x]=*** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{[x]}{n}\right)$, где [ ] – обозначение суммы.
- ***Оценка математического ожидания*** $a = \frac{[x]}{n}$ – среднее арифметическое ***.***
- ***Среднее квадратическое отклонение результата (геодезических) измерений; СКО {σ} -*** параметр функции распределения результатов измерений, характеризующий их «рассеяние» и равный положительному значению корня квадратного из дисперсии результата измерений.

*Примечание:*

*1. Дисперсия случайной величины* $\sigma^2$ *равна математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:*

$$\sigma^2 = M[X - M(x)]^2$$

*2. В геодезической практике среднее квадратическое отклонение вычисляется при исключении на результат влияния систематических погрешностей измерений (подразумевается отсутствие или предварительное исключение систематических погрешностей измерений).*

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- ***средняя квадратическая погрешность результата (геодезических) измерений; СКП {m} -*** эмпирическая оценка среднего квадратического отклонения результата измерений.
- ***предельная погрешность (геодезических) измерений {$t_p m$} -*** погрешность геодезических измерений, которую с заданной вероятностью не должны превышать по абсолютному значению погрешности результатов измерений.
- ***допустимая погрешность (геодезических) измерений {$\Delta_Д$} /предел допускаемой погрешности геодезических измерений / -*** погрешность геодезических измерений, верхний предел которой установлен в нормативной документации.
- ***предварительная (математическая) обработка (результатов геодезических измерений) -*** математическая обработка геодезических измерений, связанная с проверкой качества и получением первичной информации по результатам геодезических измерений на отдельных пунктах геодезических построений.
- ***уравнительные вычисления -*** комплекс вычислительных работ, проводимых с целью получения и оценки точности окончательных результатов измерений.

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- ***уравнивание (геодезических измерений) -*** математическая обработка результатов геодезических измерений, выполняемая с целью нахождения оптимальных оценок измеренных величин и их функций, а также их оценки точности.

*Примечание. В геодезической практике применяются различные способы уравнивания: параметрический, коррелатный, комбинированный, рекуррентный, параметрический способ с зависимыми переменными, коррелатный способ с дополнительными параметрами.*

- ***уравненное значение (результата геодезических измерений) -*** значение искомой геодезической величины (функции измеренных величин), полученное из уравнивания.
- ***поправка из уравнивания -*** разность между уравненным и измеренным значениями результатов измерений.
- ***невязка (функция измеренных геодезических величин) {f} -*** разность между значениями функции, вычисленной по результатам измерений, и теоретическим ее значением.

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- ***вес результата (геодезических) измерений {p} -*** относительная характеристика точности результата геодезических измерений, обратно пропорциональная дисперсии результата измерений.
- ***обратный вес результата (геодезических) измерений {Q} -*** относительная характеристика точности результата геодезических измерений, обратная его весу.
- ***средняя квадратическая погрешность уравненного значения (результата геодезических измерений) {$m_x$} -*** оценка значения геодезической величины по результатам уравнивания измерений, получаемая по формуле

$m_x = \mu\sqrt{Q}$ , где $\mu$ - средняя квадратическая погрешность результата измерений, вес которого принят за единицу; Q - обратный вес результата измерений X или значений искомых неизвестных.

# ПОГРЕШНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ. СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Истинной погрешностью измерений называют отклонение результата измерения $x_i$ от его истинного значения X:

$$\varepsilon_i = x_i - X \qquad (1)$$

К правой части уравнения (1) прибавим и вычтем математическое ожидание $M_x$ :

$$\varepsilon_i = (x_i - M_x) + (M_x - X), \qquad (2)$$

где $(x_i - M_x) = \Delta_i$ - случайная погрешность (3)

$(M_x - X) = \theta$ - систематическая погрешность (4)

По характеру действия **систематические погрешности** бывают постоянные, односторонне действующие (сохраняющие только знак) и функциональные (меняющиеся по какому-либо закону). Систематические погрешности исключают введением поправок или применением соответствующей методики измерений.

**Случайные погрешности** могут быть представлены как суммы весьма большого числа сравнительно малых слагаемых – элементарных погрешностей, каждая из которых вызвана действием отдельной причины, не зависящей от остальных.

Каким бы законам распределения они не подчинялись в сумме общая погрешность подчиняется закону, близкому к нормальному. В геодезической практике можно выделить следующие **элементарные погрешности**:

- объекта измерений;
- субъекта измерений;
- средств измерений;
- выбранной методики измерений;
- внешней среды.

# ПОГРЕШНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ. СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью вероятностей:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad , \qquad (5)$$

где $\sigma$- среднее квадратическое отклонение результата измерений,

$a$- математическое ожидание случайной погрешности.

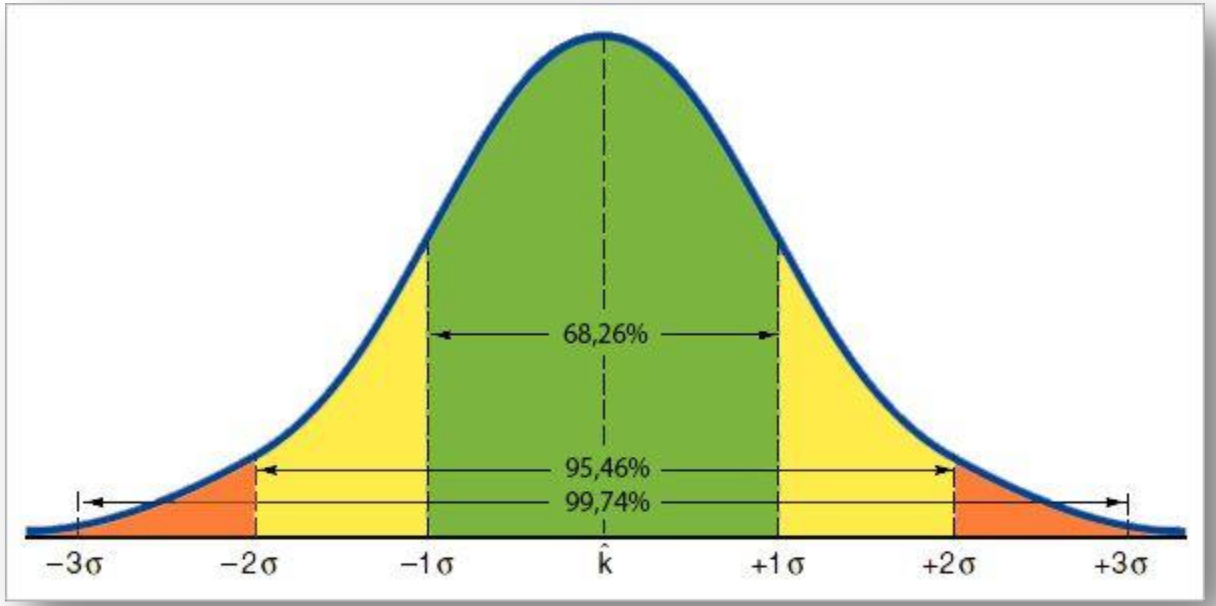



**Рисунок 1. График плотности вероятностей нормального закона распределения случайных величин.**

# ПОГРЕШНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ. СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Функция нормального распределения:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad (6)$$

где t=(x-a)/σ – центрированная и нормированная по σ случайная погрешность с параметрами (0,1), для которых составлены специальные таблицы.

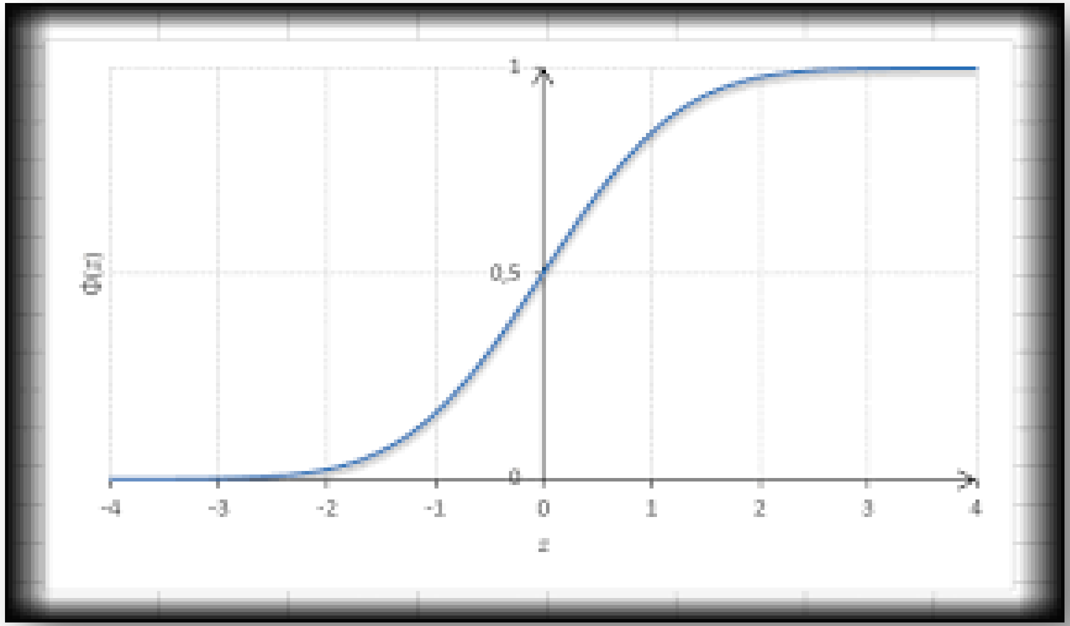



**Рисунок 2. График функции нормального распределения.**

# РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. ЗАДАНИЕ 1

**Задание 1.** Проверить гипотезу о нормальном распределении невязок в треугольниках триангуляции 1 класса приведенных в таблице 1.
Порядок решения:
1. Поместить в электронную таблицу Excel исходные данные.
2. Упорядочить погрешности по возрастанию.
3. Рассчитать основные характеристики ряда случайных погрешностей:
- оценку математического ожидания

$$a = \frac{[f_{\beta i}]}{n} = +0{,}12'' \ ;$$

- оценку дисперсии

$$m^2 = \frac{[f_{\beta i}^2]}{n} = 23{,}87 \ ;$$

- оценку среднего квадратического отклонения

$$m = \sqrt{\frac{[f_{\beta i}^2]}{n}} = 4{,}89'';$$

- третий центральный момент

$$\mu_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f_{\beta i} - a)^3 = -12{,}57;$$

- четвертый центральный момент

$$\mu_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f_{\beta i} - a)^4 = 1407{,}49 \ ;$$

- асимметрию

$$S = \frac{\mu_3}{m^3} = -0{,}11 \ ;$$

- эксцесс

$$E = \frac{\mu_4}{m^4} - 3 = -0{,}53$$

| № треугольника | Невязка $f_\beta''$ | № треугольника | Невязка $f_\beta''$ | № треугольника | Невязка $f_\beta''$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | +2,12 | 34 | +1,12 | 67 | +0,54 |
| 2 | -6,00 | 35 | +2,00 | 68 | -8,68 |
| 3 | -1,38 | 36 | +0,44 | 69 | +3,68 |
| 4 | -4,22 | 37 | +4,98 | 70 | +3,64 |
| 5 | +0,83 | 38 | +1,89 | 71 | +3,57 |
| 6 | -8,48 | 39 | -4,75 | 72 | -1,84 |
| 7 | -5,07 | 40 | +4,92 | 73 | -3,67 |
| 8 | -2,69 | 41 | -4,77 | 74 | +6,53 |
| 9 | -0,35 | 42 | -2,79 | 75 | -1,52 |
| 10 | -8,21 | 43 | +2,14 | 76 | -1,02 |
| 11 | -2,12 | 44 | +4,33 | 77 | -5,20 |
| 12 | -4,06 | 45 | +0,80 | 78 | +5,26 |
| 13 | +4,52 | 46 | +0,78 | 79 | +2,44 |
| 14 | -6,01 | 47 | +7,80 | 80 | +1,85 |
| 15 | +5,58 | 48 | +2,19 | 81 | +6,25 |
| 16 | -9,32 | 49 | -3,20 | 82 | +5,51 |
| 17 | -1,47 | 50 | +3,77 | 83 | -4,61 |
| 18 | -0,26 | 51 | +10,14 | 84 | +2,90 |
| 19 | -1,11 | 52 | -9,91 | 85 | -3,81 |
| 20 | -11,41 | 53 | +11,72 | 86 | +1,66 |
| 21 | +8,13 | 54 | -8,98 | 87 | -3,76 |
| 22 | +4,35 | 55 | 6,05 | 88 | -7,44 |
| 23 | -7,31 | 56 | +3,95 | 89 | -0,23 |
| 24 | +1,05 | 57 | +3,67 | 90 | +3,02 |
| 25 | +4,42 | 58 | -2,69 | 91 | -5,80 |
| 26 | +8,08 | 59 | +7,69 | 92 | +6,83 |
| 27 | +7,10 | 60 | +0,24 | 93 | -1,97 |
| 28 | -0,01 | 61 | -3,33 | 94 | +0,11 |
| 29 | -0,64 | 62 | +3,61 | 95 | -0,07 |
| 30 | -2,62 | 63 | -1,28 | 96 | -1,45 |
| 31 | -6,26 | 64 | +7,24 | 98 | -5,88 |
| 32 | -0,82 | 65 | +1,84 | 98 | -4,13 |
| 33 | +7,06 | 66 | -1,64 | 99 | +1,90 |
| | | | | 100 | +3,59 |

# РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

**Для построения гистограммы**:
1) выбрать границы интервалов с таким расчетом, чтобы ширина интервала равнялась ≈½ m. В нашем примере m=4,89≈5, тогда ширина интервала = 5/2 = 2,5;
2) значения границ интервалов ($z_i$) записать в таблицу 2;
3) подсчитать практическое число попаданий случайных погрешностей в каждый интервал ($m_i$);
4) вычислить центрированные и нормированные значения границ интервалов по формуле:

$$t_i = \frac{(z_i - a)}{m} \ ;$$

5) по центрированным и нормированным значениям границ интервалов из таблицы (приложение 1) найти значения функции нормального распределения Ф(t);
6) найти вероятность попадания случайной погрешности в i-й интервал:

$$p_i = \Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i) \ ;$$

7) вычислить теоретическое число попаданий в каждый интервал: $n_i' = np_i$ ;

8) для подсчета меры расхождения практического и теоретического числа попаданий вычислить для каждого интервала величины: $\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$ ;

9) сумма этих величин дает вычисленное значение критерия χ² $\chi^2_{\text{выч.}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - n_i')^2}{n_i'}$ ,

где $m_i$ – практическое число попаданий, k -количество интервалов;

# РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

**Для построения гистограммы**:

10) по таблице критических точек распределения $\chi^2$ находят теоретическое значение $\chi^2_{\text{теор.}}$ по уровню значимости α=0,05 и числу степеней свободы ν=k-c-1, где c – число ранее определенных параметров. В нашем случае это оценка математического ожидания a и оценка среднего квадратического отклонения m, следовательно, c=2, а ν=k-c-1=9-2-1=6. Если $\chi^2_{\text{выч.}} < \chi^2_{\text{теор.}}$ то гипотеза о нормальном законе распределении принимается;

11) построить гистограмму и график плотности распределения.

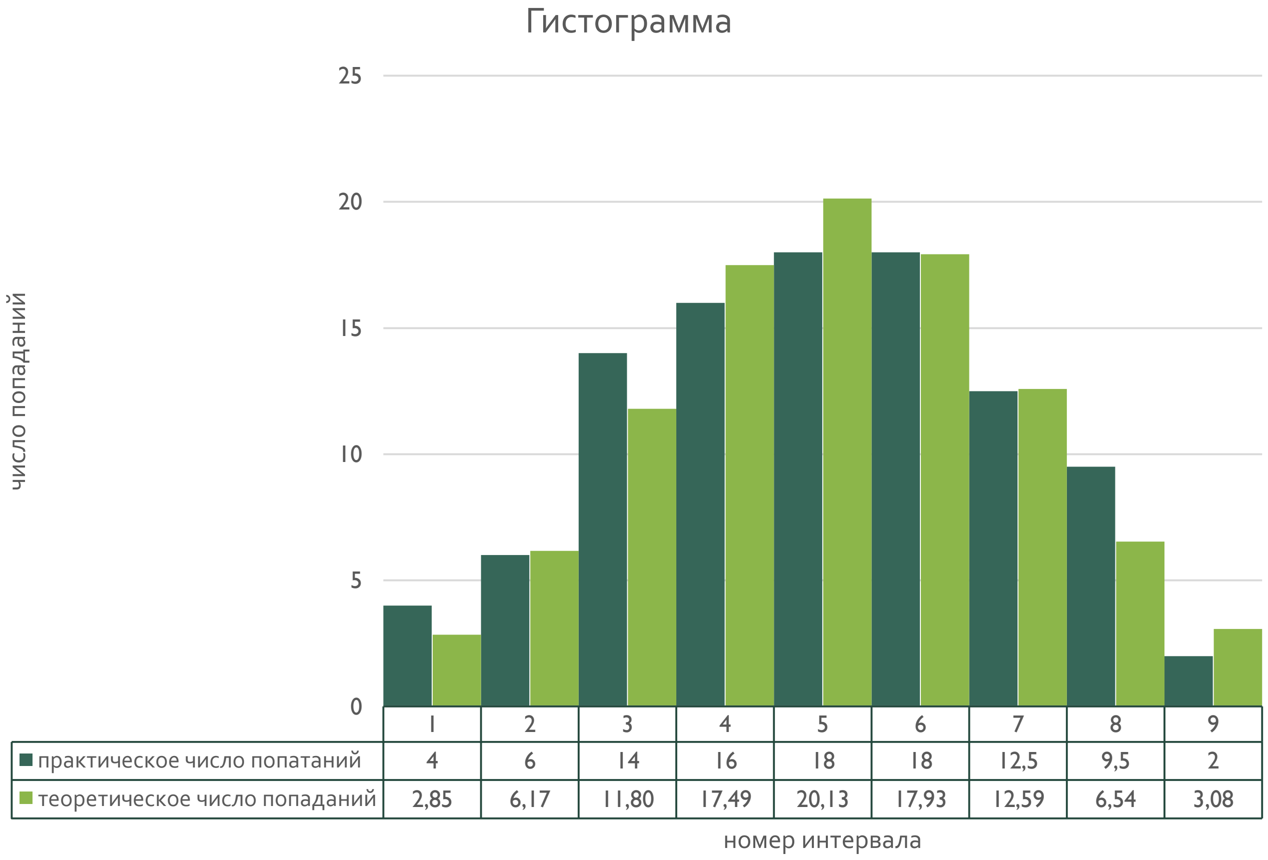



**Рисунок 3. Гистограмма.**

# РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

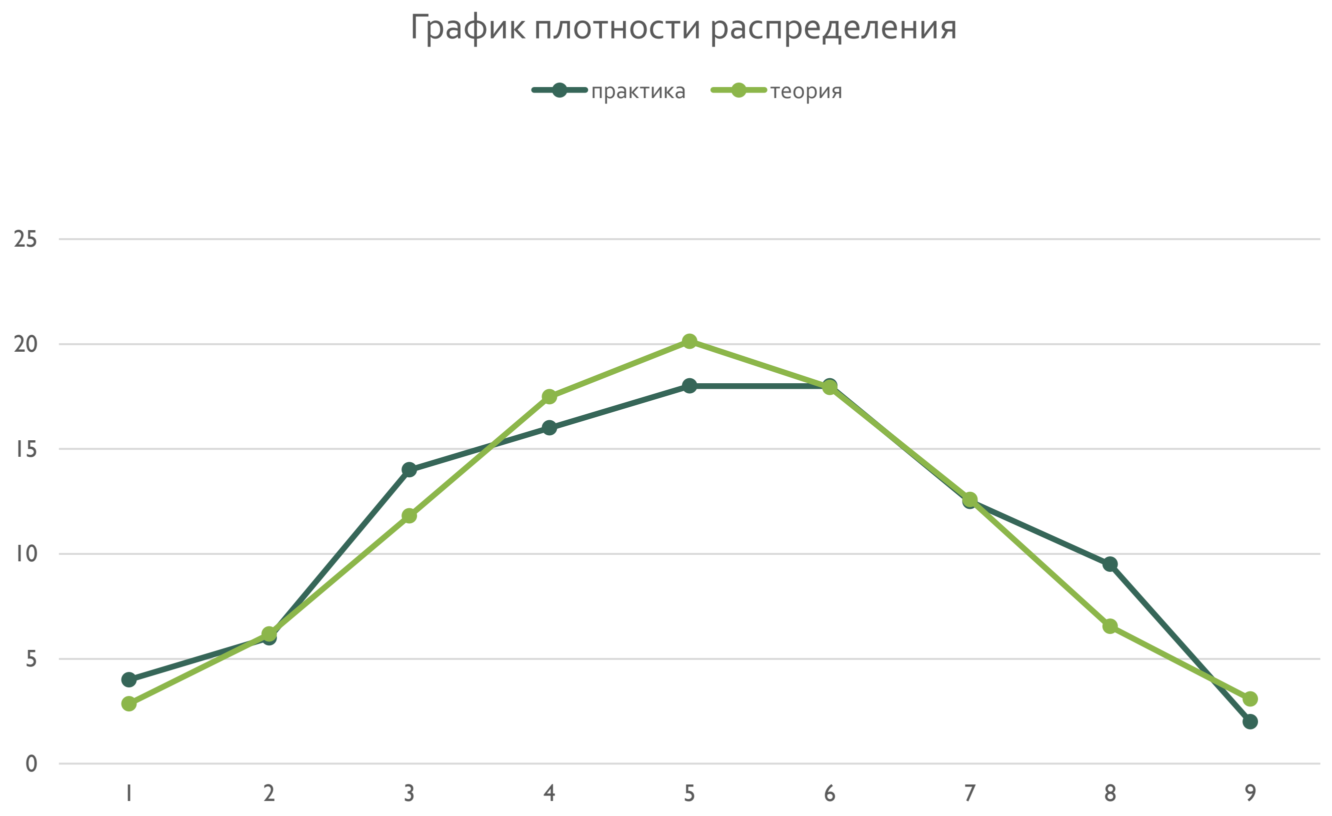



**Рисунок 4. График плотности распределения.**

| Число степеней свободы | Уровень значимости | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,01 | 0,025 | 0,0 5 | 0,95 | 0,975 | 0,99 |
| 1 | 6,6 | 5 | 3,8 | 0,0039 | 0,00098 | 0,00016 |
| 2 | 9,2 | 7,4 | 6,0 | 0,103 | 0,051 | 0,02 |
| 3 | 11,3 | 9,4 | 7,8 | 0,352 | 0,216 | 0,115 |
| 4 | 13,3 | 11,1 | 9,5 | 0,711 | 0,484 | 0,297 |
| 5 | 15,1 | 12,8 | 11,1 | 1,15 | 0,831 | 0,554 |
| 6 | 16,8 | 14,4 | 12,6 | 1,64 | 1,24 | 0,872 |
| 7 | 18,5 | 16,0 | 14,1 | 2,17 | 1,69 | 1,24 |
| 8 | 20,1 | 17,5 | 15,5 | 2,73 | 2,18 | 1,65 |
| 9 | 21,7 | 19 | 16,9 | 3,33 | 2,7 | 2,09 |
| 10 | 23,2 | 20,5 | 18,3 | 3,94 | 3,25 | 2,56 |
| 11 | 24,7 | 21,9 | 19,7 | 4,57 | 3,82 | 3,05 |
| 12 | 26,2 | 23,3 | 21 | 5,23 | 4,4 | 3,57 |
| 13 | 27,7 | 24,7 | 22,4 | 5,89 | 5,01 | 4,11 |
| 14 | 29,1 | 26,1 | 23,7 | 6,57 | 5,63 | 4,66 |
| 15 | 30,6 | 27,5 | 25 | 7,26 | 6,26 | 5,23 |
| 16 | 32 | 28,8 | 26,3 | 7,96 | 6,91 | 5,81 |
| 17 | 33,4 | 30,2 | 21,6 | 8,67 | 7,56 | 6,41 |
| 18 | 34,8 | 31,5 | 28,9 | 9,39 | 8,23 | 7,01 |
| 19 | 36,2 | 32,9 | 30,1 | 10,1 | 8,91 | 7,63 |
| 20 | 37,6 | 34,2 | 31,4 | 10,9 | 9,59 | 8,26 |
| 21 | 38,9 | 3 5,5 | 32,7 | 11,6 | 10,3 | 8,9 |
| 22 | 40,3 | 36,8 | 33,9 | 12,3 | 11 | 9,54 |
| 23 | 41,6 | 38,1 | 35,2 | 13,1 | 11,7 | 10,2 |
| 24 | 43 | 39,4 | 36,4 | 13,8 | 12,4 | 10,9 |
| 25 | 44,3 | 40,6 | 37,7 | 14,6 | 13,1 | 11,5 |
| 26 | 45,6 | 41,9 | 38,9 | 15,4 | 13,8 | 12,2 |
| 27 | 47 | 43,2 | 40,1 | 16,2 | 14,6 | 12,9 |
| 28 | 48,3 | 44,5 | 41,3 | 16,9 | 15,3 | 13,6 |

# РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

**Таблица 2** – проверка статистической гипотезы с помощью $\chi^2$ критерия Пирсона $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$ ,

где k-число интервалов, $m_1$- практическое число попаданий в i–й интервал, n =100 - число погрешностей,

$p_i$ - вероятность попадания в i – интервал pi=$\Phi(t_{i+1})$ - $\Phi(t_i)$,

$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$

| № интервала | Границы интервалов $z_i$ | $t_i=\frac{(z_i-a)}{m}$ | $\Phi(t_i)$ | $p_i$ | Практическое число попаданий $m_i$ | Теоретическое число попаданий $np_i$ | $\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -12,00 | -2,48 | 0,0066 | 0,0285 | 4 | 2,85 | 0,46 |
| 2 | -8,75 | -1,81 | 0,0351 | 0,0617 | 6 | 6,17 | 0,00 |
| 3 | -6,25 | -1,30 | 0,0968 | 0,1180 | 14 | 11,80 | 0,41 |
| 4 | -3,75 | -0,79 | 0,2148 | 0,1749 | 16 | 17,49 | 0,13 |
| 5 | -1,25 | -0,28 | 0,3897 | 0,2013 | 18 | 20,13 | 0,23 |
| 6 | +1,25 | 0,23 | 0,5910 | 0,1793 | 18 | 17,93 | 0,00 |
| 7 | +3,75 | 0,74 | 0,7703 | 0,1259 | 12,5 | 12,59 | 0,00 |
| 8 | +6,25 | 1,26 | 0,8962 | 0,0654 | 9,5 | 6,54 | 1,34 |
| 9 | +8,75 | 1,77 | 0,9616 | 0,0308 | 2 | 3,08 | 0,38 |
| | +12,00 | 2,43 | 0,9924 | | | $\chi^2_{\text{выч.}}=$ | 2,95 |

При уровне значимости 0,05 и числе степеней свободы k-c -1= 9-2-1=6 $\chi^2_{\text{теор.}}=12{,}60$

**Вывод: $\chi^2_{\text{выч.}} < \chi^2_{\text{теор.}} \rightarrow$ гипотеза о нормальном законе распределении принимается.**

# ВВЕДЕНИЕ В КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Ранее мы рассмотрели числовые характеристики одной случайной величины X – начальные и центральные моменты, важнейшими из которых являются две: математическое ожидание M[X] и дисперсия $\sigma^2$.

Аналогичные количественные характеристики можно ввести и **для системы двух случайных величин**.

**Начальным моментом** порядка k, m системы двух случайных величин (X, Y) называется метаматематическое ожидание произведения $X^k$ на $Y^m$:

$$\alpha_{k,m} = M[X^k Y^m].$$

**Центральным моментом** порядка k, m системы (X, Y) называется метаматематическое ожидание произведения k-й и m-й степени соответствующих центрированных величин:

$$\mu_{k,m} = M[(X - a_x)(Y - a_y)]$$

Первые случайные моменты представляют собой уже известные нам **математические ожидания величин** X и Y, входящих в систему:

$$a_x = \alpha_{1,0} = M[X^1 Y^0] = M[X],$$

$$a_y = \alpha_{0,1} = M[X^0 Y^1] = M[Y].$$

Совокупность математических ожиданий $a_x, a_y$ представляет собой **характеристику положения** системы. Геометрически это координаты средней точки на плоскости, вокруг которой происходит рассеивание точки (X, Y).

# ВВЕДЕНИЕ В КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Кроме первых начальных моментов, широко применяются еще и **вторые центральные моменты** системы.
Два из них представляют собой уже известные нам **дисперсии** величин X и Y:

$$\sigma_x^2 = \mu_{2,0} = M[(X - a_x)^2 (Y - a_y)^0],$$
$$\sigma_y^2 = \mu_{0,2} = M\left[(X - a_x)^0 (Y - a_y)^2\right],$$

характеризующие **рассеивание** случайной точки в направлении осей $O_x$ и $O_y$.

Особую роль, как характеристика системы, играет **второй смешанный центральный момент** :

$$\mu_{1,1} = M\left[(X - a_x)^1 (Y - a_y)^1\right],$$

то есть математическое ожидание произведения центрированных случайных величин.

В виду того, что этот момент играет важную роль для него вводится особое обозначение:

$$K_{x,y} = M[(X - a_x)(Y - a_y)].$$

Характеристика $K_{x,y}$ называется **корреляционным моментом** (иначе – моментом связи) случайных величин X и Y.

Если корреляционный момент отличен от нуля, то имеется признак наличия зависимости случайных величин.

# ВВЕДЕНИЕ В КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Корреляционный момент характеризует не только зависимость случайных величин, но и их рассеивание. Если одна из случайных величин весьма мало отклоняется от своего математического ожидания, то корреляционный момент будет мал, какой бы тесной зависимостью ни были связаны величины (X и Y).
Поэтому для характеристики связи переходят от момента $K_{x,y}$ к безразмерной характеристике

$$r_{x,y} = \frac{K_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}$$, где $\sigma_x, \sigma_y$ - СКО величин X и Y.

Этот коэффициент называется **коэффициентом корреляции***.*

**Для независимых случайных величин этот коэффициент равен нулю**.

Коэффициент корреляции характеризует не всякую зависимость, а только так называемую **линейную** зависимость.
Коэффициент корреляции может быть в пределах: $-1 < r_{x,y} < +1$. Если случайные величины X и Y связаны точной функциональной линейной зависимостью: $Y = aX + b$,
то $r_{x,y}$=±1, причем знак + или – берется в зависимости от того, положителен или отрицателен коэффициент $a$.
Определение параметров $a$ и $b$ по результатам опыта является задачей **регрессионного анализа**.
Уравнение прямой $Y = aX + b$ иначе называют **уравнением регрессии**.

# РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. ЗАДАНИЕ 2

**Задание 2.** В таблице 3 приведены 30 значений погрешностей измерений линий светодальномером, в зависимости от измеряемого расстояния. Требуется определить коэффициент корреляции и составить уравнение регрессии.

Порядок решения:

1. Поместить в электронную таблицу **Excel** исходные данные.
2. Вычислить оценки математических ожиданий

$$a_x = \frac{[x_i]}{n}; \;\; a_y = \frac{[y_i]}{n}.$$

3. Вычислить оценки дисперсий (средние квадратические погрешности)

$$m_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - a_x)^2}{n-1}}; \;\; m_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i - a_y)^2}{n-1}}$$

| № п/п | $x_i$=Di (км) | $y_i=\delta_i$, (см) | № п/п | $x_i$=Di (км) | $y_i=\delta_i$, (см) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,8 | 2,3 | 16 | 5,7 | 3,6 |
| 2 | 2,8 | 2,3 | 17 | 5,7 | 5,6 |
| 3 | 3,0 | 3,4 | 18 | 6,2 | 3,0 |
| 4 | 3,3 | 1,5 | 19 | 6,2 | 5,0 |
| 5 | 3,5 | 2,7 | 20 | 6,5 | 6,4 |
| 6 | 3,5 | 2,4 | 21 | 6,6 | 4,1 |
| 7 | 3,7 | 3,5 | 22 | 7,1 | 5,5 |
| 8 | 3,9 | 3,2 | 23 | 7,4 | 4,5 |
| 9 | 4,2 | 3,5 | 24 | 7,5 | 4,8 |
| 10 | 4,3 | 4,7 | 25 | 7,8 | 7,0 |
| 11 | 4,7 | 3,5 | 26 | 8,1 | 6,7 |
| 12 | 4,8 | 5,5 | 27 | 8,5 | 5,5 |
| 13 | 4,9 | 3,2 | 28 | 8,7 | 6,5 |
| 14 | 5,3 | 5,2 | 29 | 8,8 | 6,5 |
| 15 | 5,5 | 2,7 | 30 | 8,9 | 7,2 |

4. Вычислить корреляционный момент

$$K_{x,y} = \frac{\sum(x_i - a_x)(y_i - a_y)}{n-1}$$

# РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. ЗАДАНИЕ 2

Вычислить коэффициент корреляции

$$r_{x,y} = \frac{K_{x,y}}{m_x m_y}.$$

Расчисть коэффициенты a и b в уравнении регрессии

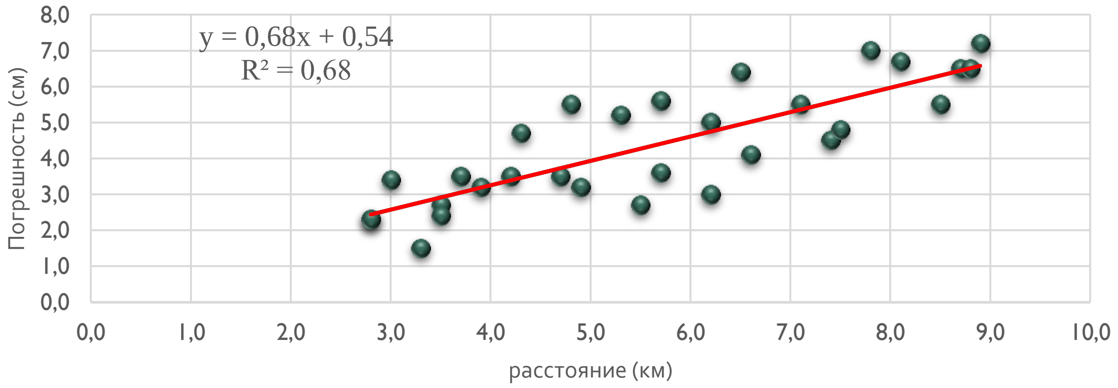
$$Y = aX + b$$

$$a = \frac{[y_i][x_i^2]-[x_i][x_i y_i]}{n[x_i^2]-[x_i]^2},$$

$$b = \frac{n[x_i y_i]-[x_i][y_i]}{n[x_i^2]-[x_i]^2}.$$

Построить график зависимости погрешности от расстояния и уравнение регрессии (рисунок 5).

Рисунок 5. График линейной зависимости погрешности измерения расстояния от длины линии




| № п/п | $x_i = D_i$(км) | $y_i = \delta_i$(см) | $x_i - a_x$ | $y_i - a_y$ | $(x_i - a_x)(y_i - a_y)$ | $(x_i - a_x)^2$ | $(y_i - a_y)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,8 | 2,3 | -2,863 | -2,083 | 5,965 | 8,199 | 4,340 |
| 2 | 2,8 | 2,3 | -2,863 | -2,083 | 5,965 | 8,199 | 4,340 |
| 3 | 3,0 | 3,4 | -2,663 | -0,983 | 2,619 | 7,093 | 0,967 |
| 4 | 3,3 | 1,5 | -2,363 | -2,883 | 6,814 | 5,585 | 8,314 |
| 5 | 3,5 | 2,7 | -2,163 | -1,683 | 3,642 | 4,680 | 2,834 |
| 6 | 3,5 | 2,4 | -2,163 | -1,983 | 4,291 | 4,680 | 3,934 |
| 7 | 3,7 | 3,5 | -1,963 | -0,883 | 1,734 | 3,855 | 0,780 |
| 8 | 3,9 | 3,2 | -1,763 | -1,183 | 2,087 | 3,109 | 1,400 |
| 9 | 4,2 | 3,5 | -1,463 | -0,883 | 1,293 | 2,141 | 0,780 |
| 10 | 4,3 | 4,7 | -1,363 | 0,317 | -0,432 | 1,859 | 0,100 |
| 11 | 4,7 | 3,5 | -0,963 | -0,883 | 0,851 | 0,928 | 0,780 |
| 12 | 4,8 | 5,5 | -0,863 | 1,117 | -0,964 | 0,745 | 1,247 |
| 13 | 4,9 | 3,2 | -0,763 | -1,183 | 0,903 | 0,583 | 1,400 |
| 14 | 5,3 | 5,2 | -0,363 | 0,817 | -0,297 | 0,132 | 0,667 |
| 15 | 5,5 | 2,7 | -0,163 | -1,683 | 0,275 | 0,027 | 2,834 |
| 16 | 5,7 | 3,6 | 0,037 | -0,783 | -0,029 | 0,001 | 0,614 |
| 17 | 5,7 | 5,6 | 0,037 | 1,217 | 0,045 | 0,001 | 1,480 |
| 18 | 6,2 | 3,0 | 0,537 | -1,383 | -0,742 | 0,288 | 1,914 |
| 19 | 6,2 | 5,0 | 0,537 | 0,617 | 0,331 | 0,288 | 0,380 |
| 20 | 6,5 | 6,4 | 0,837 | 2,017 | 1,687 | 0,700 | 4,067 |
| 21 | 6,6 | 4,1 | 0,937 | -0,283 | -0,265 | 0,877 | 0,080 |
| 22 | 7,1 | 5,5 | 1,437 | 1,117 | 1,604 | 2,064 | 1,247 |
| 23 | 7,4 | 4,5 | 1,737 | 0,117 | 0,203 | 3,016 | 0,014 |
| 24 | 7,5 | 4,8 | 1,837 | 0,417 | 0,765 | 3,373 | 0,174 |
| 25 | 7,8 | 7,0 | 2,137 | 2,617 | 5,591 | 4,565 | 6,847 |
| 26 | 8,1 | 6,7 | 2,437 | 2,317 | 5,645 | 5,937 | 5,367 |
| 27 | 8,5 | 5,5 | 2,837 | 1,117 | 3,168 | 8,047 | 1,247 |
| 28 | 8,7 | 6,5 | 3,037 | 2,117 | 6,428 | 9,221 | 4,480 |
| 29 | 8,8 | 6,5 | 3,137 | 2,117 | 6,639 | 9,839 | 4,480 |
| 30 | 8,9 | 7,2 | 3,237 | 2,817 | 9,117 | 10,476 | 7,934 |
| a= | 5,7 | 4,4 | | $K_{xy}$= | 2,498 | 110,510 | 75,042 |
| | | | | $m_x$= | 1,919 | | |
| | | | | $m_y$= | 1,582 | | |
| | | | | $r_{xy}$= | 0,823 | | |
| | | | | корел= | 0,823 | | |

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПО ИСТИННЫМ ПОГРЕШНОСТЯМ

**Задание 3.1** По данным, приведенным в задании 1 вычислить:

- среднюю квадратическую погрешность суммы углов одного треугольника;
- среднюю и вероятную погрешности той же суммы;
- значение средней и вероятной погрешности по формулам, связывающим их со средней квадратической погрешностью;
- предельную погрешность.

Проверить свойства случайных погрешностей на данном примере.

Порядок решения:

1. Рассматривая невязки в сумме углов как истинные погрешности найдем среднюю квадратическую погрешность по формуле

Гаусса: $m = \sqrt{\frac{[f_{\beta i}^2]}{n}} = 4{,}89''.$

2. Средняя погрешность $\vartheta = \frac{[|f_{\beta i}|]}{n} = 4{,}00''.$

Эта же погрешность может быть вычислена по формуле:

$$\vartheta = \frac{4}{5}m = 3.91''.$$

| № треугольника | Невязка $f_\beta''$ | № треугольника | Невязка $f_\beta''$ | № треугольника | Невязка $f_\beta''$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | +2,12 | 34 | +1,12 | 67 | +0,54 |
| 2 | -6,00 | 35 | +2,00 | 68 | -8,68 |
| 3 | -1,38 | 36 | +0,44 | 69 | +3,68 |
| 4 | -4,22 | 37 | +4,98 | 70 | +3,64 |
| 5 | +0,83 | 38 | +1,89 | 71 | +3,57 |
| 6 | -8,48 | 39 | -4,75 | 72 | -1,84 |
| 7 | -5,07 | 40 | +4,92 | 73 | -3,67 |
| 8 | -2,69 | 41 | -4,77 | 74 | +6,53 |
| 9 | -0,35 | 42 | -2,79 | 75 | -1,52 |
| 10 | -8,21 | 43 | +2,14 | 76 | -1,02 |
| 11 | -2,12 | 44 | +4,33 | 77 | -5,20 |
| 12 | -4,06 | 45 | +0,80 | 78 | +5,26 |
| 13 | +4,52 | 46 | +0,78 | 79 | +2,44 |
| 14 | -6,01 | 47 | +7,80 | 80 | +1,85 |
| 15 | +5,58 | 48 | +2,19 | 81 | +6,25 |
| 16 | -9,32 | 49 | -3,20 | 82 | +5,51 |
| 17 | -1,47 | 50 | +3,77 | 83 | -4,61 |
| 18 | -0,26 | 51 | +10,14 | 84 | +2,90 |
| 19 | -1,11 | 52 | -9,91 | 85 | -3,81 |
| 20 | -11,41 | 53 | +11,72 | 86 | +1,66 |
| 21 | +8,13 | 54 | -8,98 | 87 | -3,76 |
| 22 | +4,35 | 55 | 6,05 | 88 | -7,44 |
| 23 | -7,31 | 56 | +3,95 | 89 | -0,23 |
| 24 | +1,05 | 57 | +3,67 | 90 | +3,02 |
| 25 | +4,42 | 58 | -2,69 | 91 | -5,80 |
| 26 | +8,08 | 59 | +7,69 | 92 | +6,83 |
| 27 | +7,10 | 60 | +0,24 | 93 | -1,97 |
| 28 | -0,01 | 61 | -3,33 | 94 | +0,11 |
| 29 | -0,64 | 62 | +3,61 | 95 | -0,07 |
| 30 | -2,62 | 63 | -1,28 | 96 | -1,45 |
| 31 | -6,26 | 64 | +7,24 | 98 | -5,88 |
| 32 | -0,82 | 65 | +1,84 | 98 | -4,13 |
| 33 | +7,06 | 66 | -1,64 | 99 | +1,90 |
| | | | | 100 | +3,59 |

| № треугольника | $f_\beta$ | $\|f_\beta\|$ | $f_\beta^2$ | Упорядоченные по возрастанию $\|f_\beta\|$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | -11,41 | 11,41 | 130,19 | 0,01 |
| 2 | -9,91 | 9,91 | 98,21 | 0,07 |
| 3 | -9,32 | 9,32 | 86,86 | 0,11 |
| 4 | -8,98 | 8,98 | 80,64 | 0,23 |
| 5 | -8,68 | 8,68 | 75,34 | 0,24 |
| 6 | -8,48 | 8,48 | 71,91 | 0,26 |
| 7 | -8,21 | 8,21 | 67,40 | 0,35 |
| 8 | -7,44 | 7,44 | 55,35 | 0,44 |
| 9 | -7,31 | 7,31 | 53,44 | 0,54 |
| 10 | -6,26 | 6,26 | 39,19 | 0,64 |
| 11 | -6,01 | 6,01 | 36,12 | 0,78 |
| 12 | -6,00 | 6,00 | 36,00 | 0,80 |
| 13 | -5,88 | 5,88 | 34,57 | 0,82 |
| 14 | -5,80 | 5,80 | 33,64 | 0,83 |
| 15 | -5,20 | 5,20 | 27,04 | 1,02 |
| 16 | -5,07 | 5,07 | 25,70 | 1,05 |
| 17 | -4,77 | 4,77 | 22,75 | 1,11 |
| 18 | -4,75 | 4,75 | 22,56 | 1,12 |
| 19 | -4,61 | 4,61 | 21,25 | 1,28 |
| 20 | -4,22 | 4,22 | 17,81 | 1,38 |
| 21 | -4,13 | 4,13 | 17,06 | 1,45 |
| 22 | -4,06 | 4,06 | 16,48 | 1,47 |
| 23 | -3,81 | 3,81 | 14,52 | 1,52 |
| 24 | -3,76 | 3,76 | 14,14 | 1,64 |
| 25 | -3,67 | 3,67 | 13,47 | 1,66 |
| 26 | -3,33 | 3,33 | 11,09 | 1,84 |
| 27 | -3,20 | 3,20 | 10,24 | 1,84 |
| 28 | -2,79 | 2,79 | 7,78 | 1,85 |
| 29 | -2,69 | 2,69 | 7,24 | 1,89 |
| 30 | -2,69 | 2,69 | 7,24 | 1,90 |

| № треугольника | $f_\beta$ | $\|f_\beta\|$ | $f_\beta^2$ | Упорядоченные по возрастанию $\|f_\beta\|$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 31 | -2,62 | 2,62 | 6,86 | 1,97 |
| 32 | -2,12 | 2,12 | 4,49 | 2,00 |
| 33 | -1,97 | 1,97 | 3,88 | 2,12 |
| 34 | -1,84 | 1,84 | 3,39 | 2,12 |
| 35 | -1,64 | 1,64 | 2,69 | 2,14 |
| 36 | -1,52 | 1,52 | 2,31 | 2,19 |
| 37 | -1,47 | 1,47 | 2,16 | 2,44 |
| 38 | -1,45 | 1,45 | 2,10 | 2,62 |
| 39 | -1,38 | 1,38 | 1,90 | 2,69 |
| 40 | -1,28 | 1,28 | 1,64 | 2,69 |
| 41 | -1,11 | 1,11 | 1,23 | 2,79 |
| 42 | -1,02 | 1,02 | 1,04 | 2,90 |
| 43 | -0,82 | 0,82 | 0,67 | 3,02 |
| 44 | -0,64 | 0,64 | 0,41 | 3,20 |
| 45 | -0,35 | 0,35 | 0,12 | 3,33 |
| 46 | -0,26 | 0,26 | 0,07 | 3,57 |
| 47 | -0,23 | 0,23 | 0,05 | 3,59 |
| 48 | -0,07 | 0,07 | 0,00 | 3,61 |
| 49 | -0,01 | 0,01 | 0,00 | 3,64 |
| 50 | 0,11 | 0,11 | 0,01 | 3,67 |
| 51 | 0,24 | 0,24 | 0,06 | 3,67 |
| 52 | 0,44 | 0,44 | 0,19 | 3,68 |
| 53 | 0,54 | 0,54 | 0,29 | 3,76 |
| 54 | 0,78 | 0,78 | 0,61 | 3,77 |
| 55 | 0,80 | 0,80 | 0,64 | 3,81 |
| 56 | 0,83 | 0,83 | 0,69 | 3,95 |
| 57 | 1,05 | 1,05 | 1,10 | 4,06 |
| 58 | 1,12 | 1,12 | 1,25 | 4,13 |
| 59 | 1,66 | 1,66 | 2,76 | 4,22 |
| 60 | 1,84 | 1,84 | 3,39 | 4,33 |

| № треугольника | $f_\beta$ | $\|f_\beta\|$ | $f_\beta^2$ | Упорядоченные по возрастанию $\|f_\beta\|$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 61 | 1,85 | 1,85 | 3,42 | 4,35 |
| 62 | 1,89 | 1,89 | 3,57 | 4,42 |
| 63 | 1,90 | 1,90 | 3,61 | 4,52 |
| 64 | 2,00 | 2,00 | 4,00 | 4,61 |
| 65 | 2,12 | 2,12 | 4,49 | 4,75 |
| 66 | 2,14 | 2,14 | 4,58 | 4,77 |
| 67 | 2,19 | 2,19 | 4,80 | 4,92 |
| 68 | 2,44 | 2,44 | 5,95 | 4,98 |
| 69 | 2,90 | 2,90 | 8,41 | 5,07 |
| 70 | 3,02 | 3,02 | 9,12 | 5,20 |
| 71 | 3,57 | 3,57 | 12,74 | 5,26 |
| 72 | 3,59 | 3,59 | 12,89 | 5,51 |
| 73 | 3,61 | 3,61 | 13,03 | 5,58 |
| 74 | 3,64 | 3,64 | 13,25 | 5,80 |
| 75 | 3,67 | 3,67 | 13,47 | 5,88 |
| 76 | 3,68 | 3,68 | 13,54 | 6,00 |
| 77 | 3,77 | 3,77 | 14,21 | 6,01 |
| 78 | 3,95 | 3,95 | 15,60 | 6,05 |
| 79 | 4,33 | 4,33 | 18,75 | 6,25 |
| 80 | 4,35 | 4,35 | 18,92 | 6,26 |
| 81 | 4,42 | 4,42 | 19,54 | 6,53 |
| 82 | 4,52 | 4,52 | 20,43 | 6,83 |
| 83 | 4,92 | 4,92 | 24,21 | 7,06 |
| 84 | 4,98 | 4,98 | 24,80 | 7,10 |
| 85 | 5,26 | 5,26 | 27,67 | 7,24 |
| 86 | 5,51 | 5,51 | 30,36 | 7,31 |
| 87 | 5,58 | 5,58 | 31,14 | 7,44 |
| 88 | 6,05 | 6,05 | 36,60 | 7,69 |
| 89 | 6,25 | 6,25 | 39,06 | 7,80 |
| 90 | 6,53 | 6,53 | 42,64 | 8,08 |

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПО ИСТИННЫМ ПОГРЕШНОСТЯМ

| № треугольника | $f_\beta$ | $\lvert f_\beta \rvert$ | $f_\beta^2$ | Упорядоченные по возрастанию $\lvert f_\beta \rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 91 | 6,83 | 6,83 | 46,65 | 8,13 |
| 92 | 7,06 | 7,06 | 49,84 | 8,21 |
| 93 | 7,10 | 7,10 | 50,41 | 8,48 |
| 94 | 7,24 | 7,24 | 52,42 | 8,68 |
| 95 | 7,69 | 7,69 | 59,14 | 8,98 |
| 96 | 7,80 | 7,80 | 60,84 | 9,32 |
| 97 | 8,08 | 8,08 | 65,29 | 9,91 |
| 98 | 8,13 | 8,13 | 66,10 | 10,14 |
| 99 | 10,14 | 10,14 | 102,82 | 11,41 |
| 100 | 11,72 | 11,72 | 137,36 | 11,72 |
| сумма= | 11,59 | 400,07 | 2386,93 | |
| среднее арифметическое a= | 0,12 | | | |
| оценка дисперсии $m^2 =$ | 23,87 | | | |
| оценка ско m= | 4,89 | | | |
| средняя погрешность ϑ= | 4,00 | | | |

3. **Вероятная погрешность p** – это случайная погрешность, которая находится в середине ряда погрешностей, расположенных в порядке возрастания их абсолютных величин. В нашем случае 50-я погрешность равна 3.67″ и 51-я 3.67″.
 Эта же погрешность может быть вычислена по формуле:

$$p = \frac{2}{3} m = \pm 3{,}26''.$$

4. Предельная погрешность

$$\Delta_{\text{пред.}} = 3m = \pm 14{,}67''.$$

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПО ИСТИННЫМ ПОГРЕШНОСТЯМ

Проверим свойства случайных погрешностей на данном примере:

1) ни одна из погрешностей не превосходит предела, равного 3m, наибольшая абсолютная погрешность в нашем примере оказалась равной 11,72″ при допуске $\pm 14.67''$;
2) положительных погрешностей 51 и их сумма равна +205,83; отрицательных 49 и сумма -194,24;
3) сумма всех погрешностей равна +11,59 и их среднее арифметическое $\frac{[f_\beta]}{n}$ = +11,59/100=+0,12″;
4) число погрешностей по абсолютной величине

| | | |
|---|---|---|
| меньше m | - | 66; |
| находятся между m и 2m | - | 30; |
| находятся между 2m и 3m | - | 4. |

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПО ИСТИННЫМ ПОГРЕШНОСТЯМ

**Задание 3.2** Электронным теодолитом DGT-10 был измерен угол 10-ю приемами. Найти оценку математического ожидания (среднее арифметическое), среднюю квадратическую погрешность измерения угла одним приёмом и её надежность.

**Порядок решения:**

1. Определить наиболее надежное значение измеренного угла в виде простой арифметической средины (арифметического среднего): $a = \frac{[\beta_i]}{n}$ .

2. Вычислить среднюю квадратическую погрешность измерения угла по формуле **Бесселя**:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2_{\beta i}]}{n-1}},$$

где $\Delta_{\beta i} = \beta_i - a$ — уклонения от арифметической средины.

Вычислить надежность средней квадратической погрешности:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

| № приема | Значение угла $\beta_i$ | $\Delta_\beta = \beta - a$ | $\Delta^2_\beta$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 45°33′04″ | -13,70 | 187,69 |
| 2 | 12 | -5,70 | 32,49 |
| 3 | 24 | 6,30 | 39,69 |
| 4 | 18 | 0,30 | 0,09 |
| 5 | 25 | 7,30 | 53,29 |
| 6 | 28 | 10,30 | 106,09 |
| 7 | 25 | 7,30 | 53,29 |
| 8 | 06 | -11,70 | 136,89 |
| 9 | 21 | 3,30 | 10,89 |
| 10 | 14 | -3,70 | 13,69 |
| Сумма [ ] = | 177 | 0,00 | 634,10 |
| Среднее a = | 18 | | |
| Оценка дисперсии $D = [\Delta_\beta{}^2]$/n-1 | 70 | | |
| Средняя квадратическая погрешность $m = \sqrt{D}$ | 8 | | |
| $m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}$ | 1,9 | | |

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ НЕЗАВИСИМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В геодезии часто искомые величины находят как функции измеренных аргументов. Следовательно, средняя квадратическая погрешность будет зависеть как от погрешностей аргументов, так и от вида функции.

Пусть дана функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – измеренные величины, с известными средними квадратическими погрешностями $m_1, m_2, \dots, m_n$, тогда средняя квадратическая погрешность функции может быть вычислена по формуле:

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_{x_n}^2,$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ – частные производные по i-му элементу.

В таблице приведены производные для основных функций.

| № | y(x) | y/(x) | № | y(x) | y/(x) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $y = C$ | 0 | 8 | $y = \cos x$ | $-\sin x$ |
| 2 | $y = x^n$ | $nx^{n-1}$ | 9 | $y = \operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{cos^2 x}$ |
| 3 | $y = a^x$ | $a^x lna$ | 10 | $y = \operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{sin^2 x}$ |
| 4 | $y = e^x$ | $e^x$ | 11 | $y = \arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 5 | $y = log_a x$ | $\frac{1}{xlna}$ | 12 | $y = \arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 6 | $y = \ln x$ | $\frac{1}{x}$ | 13 | $y = arctg\ x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| 7 | $y = \sin x$ | $\cos x$ | 14 | $y = arcctg\ x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |

**При определении производных следует соблюдать следующие правила:**

**1.** $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}'$. **2.** $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})' = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}'$. **3.** $(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y})' = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}'$. **4.** $\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right)' = \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}'}{\boldsymbol{y}^2}$.

**5.** $(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x})' = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}'$ $(\boldsymbol{C}$ – константа$)$. **Для функции линейного вида** $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_0 + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1 + \dots + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{x}_n$ **,**

**где** $\boldsymbol{C}_i$ **– постоянные, формула средней квадратической погрешности функции примет вид:** $\boldsymbol{m}_y^2 = \boldsymbol{C}_1{}^2\boldsymbol{m}_{x_1}^2 + \boldsymbol{C}_2{}^2\boldsymbol{m}_{x_2}^2 + \dots + \boldsymbol{C}_n{}^2\boldsymbol{m}_{x_n}^2$.

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ НЕЗАВИСИМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

**Пример 4.1.**

Вычислить приращения координат и их СКП, если S = 175.33 м, α=266⁰33′, $m_s = 0{,}06$ м. и $m_\alpha = 30''$ .

Порядок решения:

Запишем уравнения для вычисления приращений координат:

$\Delta_x = S\cos\alpha$

$\Delta_y = S\sin\alpha$ . Подставив исходные данные в уравнения получим:

$$\Delta_x = S\cos\alpha = 175.33\cos 266°33' = \mathbf{-12.55}\text{ м}.$$

$$\Delta_y = S\sin\alpha = 175.33\sin 266°33' = \mathbf{-175.01}\text{ м}.$$

СКП приращений могут быть вычислены по формулам:

$$m_{\Delta_x}{}^2 = \left(\frac{\partial(\Delta_x)}{\partial_S}\right)^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial(\Delta_x)}{\partial_\alpha}\right)^2 m_\alpha^2\,;$$

$$m_{\Delta_y}{}^2 = \left(\frac{\partial(\Delta_y)}{\partial_S}\right)^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial(\Delta_y)}{\partial_\alpha}\right)^2 m_\alpha^2,$$

где $\frac{\partial(\Delta_x)}{\partial_S}, \frac{\partial(\Delta_x)}{\partial_\alpha}, \frac{\partial(\Delta_y)}{\partial_S}, \frac{\partial(\Delta_y)}{\partial_\alpha}$ – частные производные от $\Delta_x$ и $\Delta_y$ соответственно по аргументам S и α.

$$\frac{\partial(\Delta_x)}{\partial_S} = \cos\alpha\,, \frac{\partial(\Delta_x)}{\partial_\alpha} = -S\sin\alpha = -\Delta_y;$$

$$\frac{\partial(\Delta_y)}{\partial_S} = \sin\alpha\,, \frac{\partial(\Delta_y)}{\partial_\alpha} = \quad S\cos\alpha = \Delta_x$$

$$m_{\Delta_x}{}^2 = (m_S\cos\alpha)^2 + (-\Delta_y m_\alpha)^2;\ m_{\Delta_y}{}^2 = (m_S\sin\alpha)^2 + (-\Delta_x m_\alpha)^2.$$

При вычислениях величина $m_\alpha$ должна быть представлена в радианной мере, но в условии задачи она задана в градусной мере. С учетом этого формулы примут следующий вид

$$m_{\Delta_x}{}^2 = (m_S\cos\alpha)^2 + (-\Delta_y\frac{m_\alpha}{\rho})^2\ ; m_{\Delta_y}{}^2 = (m_S\sin\alpha)^2 + (-\Delta_x\frac{m_\alpha}{\rho})^2.$$

Подставив исходные данные в полученные уравнения получим:

$$m_{\Delta_x} = \sqrt{(0{,}06*(-0{,}060))^2 + \left(-175{,}01*\frac{30''}{206265''}\right)^2} = \mathbf{0,06}\text{ м}.$$

$$m_{\Delta_y} = \sqrt{(0{,}06*(-0{,}998))^2 + \left(-12.55*\frac{30''}{206265''}\right)^2} = \mathbf{0,06}\text{ м}.$$

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ НЕЗАВИСИМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

**Пример 4.2.**

Вычислить СКП превышения, полученного на станции геометрического нивелирования, если СКП отсчета по рейке равно одному миллиметру.

Порядок решения:

1. Запишем функцию превышения: $h = \frac{(v_з^ч - v_п^ч) + (v_з^к - v_п^к)}{2}$ или $h = \frac{1}{2} v_з^ч - \frac{1}{2} v_п^ч + \frac{1}{2} v_з^к - \frac{1}{2} v_п^к$ .

2. Это соотношение представляет собой линейную функцию независимых результатов измерений – отсчетов. В этом случае для вычисления СКП превышения применима формула:

$$m_y^2 = {C_1}^2 m_{x_1}^2 + {C_2}^2 m_{x_2}^2 + \cdots + {C_n}^2 m_{x_n}^2 ,$$

при этом коэффициенты соответственно равны $C_1 = +\frac{1}{2}$; $C_2 = -\frac{1}{2}$; $C_3 = +\frac{1}{2}$; $C_4 = -\frac{1}{2}$.

3. Учитывая, что средние квадратические погрешности отсчетов равны между собой, окончательно получим:

$$m_h = \sqrt{\frac{1}{4} m_0^2 + \frac{1}{4} m_0^2 + \frac{1}{4} m_0^2 + \frac{1}{4} m_0^2} = m_0 = 1 \text{ мм}.$$

# НЕРАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ. ВЕСА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

**Вес** является относительной характеристикой точности результата измерения и рассчитывается как величина, обратно пропорциональная квадрату среднего квадратического отклонения (дисперсии) результата измерения.

Дан ряд результатов измерений: $x_1, x_2, \dots, x_n$, каждое из которых характеризуется, соответственно, дисперсией $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$. Тогда вес i-го результата измерения может быть вычислен по формуле: $p_i = \frac{k}{\sigma_i^2}$ ,

где k- произвольный коэффициент. **Чем больше вес, тем точнее это измерение по сравнению с другими**.

Выбирая различные значения k, тем самым увеличиваем или уменьшаем в одно и тоже число раз веса всех результатов измерений $\rightarrow p_i = \frac{k}{\sigma_i^2} \Rightarrow k = p_i\sigma_i^2;\ p_j = \frac{k}{\sigma_j^2} \Rightarrow k = p_j\sigma_j^2; \rightarrow p_i\sigma_i^2 = p_j\sigma_j^2$ .

Данное равенство позволяет вычислить любую четвертую величину по трем данным: $p_i = \frac{p_j\sigma_j^2}{\sigma_i^2}$ или $\sigma_i = \sigma_j\sqrt{\frac{p_i}{p_j}}$.

Выберем k с таким расчетом, чтобы вес одного из измерений был равен 1: $k = p_j\sigma_j^2 = 1 * \sigma_j^2$

Дисперсию измерения, вес которого равен единице обычно обозначают $\sigma_0^2$, тогда $k = \sigma_j^2 = \sigma_0^2$ , и верно соотношение: $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$ . В геодезической практике величину $\sigma_0$ называют средним квадратическим отклонением величины вес которой равен единице или **СКО единицы веса**.

# НЕРАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ. ВЕСА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Оценку СКО единицы веса обычно обозначают μ и называют средней квадратической погрешностью единицы веса (**СКП единицы веса**). Обычно в геодезической практике СКО остаются неизвестными, и тогда для расчета весов используют их оценки, то есть СКП. Тогда формула для расчета весов примет вид: $p_i = \frac{k}{m_i^2} = \frac{\mu_0^2}{m_i^2}$.

**Пример 5.1.**

Один и тот же угол измерен теодолитом 2Т5 со средней квадратической погрешностью $m_1 = 5''$ и теодолитом 2Т30 со средней квадратической погрешностью $m_2 = 30''$. Определить веса измерений и СКП единицы веса.

Порядок решения:

1. Примем для расчета весов k= 100. Тогда веса примут следующие значения:

$$p_1 = \frac{k}{m_1^2} = \frac{100}{25} = 4; \quad p_2 = \frac{k}{m_2^2} = \frac{100}{900} = \frac{1}{9} = 0{,}11.$$

2. Для определения СКП единицы веса воспользуемся формулой $p_i = \frac{k}{m_i^2} = \frac{\mu_0^2}{m_i^2} \rightarrow \mu_0^2 = k$ и $\mu_0 = \sqrt{k} = \sqrt{100} = 10''$.

**Пример 5.2.**

Угол измерен со средней квадратической погрешностью $m = 2''$ и имеет вес $p = 9$. Определить СКП единицы веса.

Порядок решения: $p = \frac{\mu_0^2}{m^2} \rightarrow \mu_0 = m\sqrt{p} = 2''\sqrt{9} = 6''$.

# ВЕСА ФУНКЦИЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – результаты независимых измерений, полученные с весами $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тогда дифференцируемая функция этих результатов измерений $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет обратный вес, вычисляемый по формуле:

$$\frac{1}{p_y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \frac{1}{p_2} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \frac{1}{p_n}.$$

Для функции линейного вида $y = C_0 + C_1 x_1 + \dots + C_n x_n$ формула примет вид:

$$\frac{1}{p_y} = \frac{C_1^2}{p_1} + \frac{C_2^2}{p_2} + \dots + \frac{C_n^2}{p_n}.$$

# ОБРАБОТКА РЯДА НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Имеется ряд $x_1, x_2, \dots x_n$ независимых результатов измерений одной и той же физической величины X, истинное значение которой неизвестно. Все измерения выполнялись в различных условиях, характеризующихся весами $p_1, p_2, \dots, p_n$.

На основании этих данных необходимо решить две задачи:

*Задача уравнивания* - нахождение наилучшего приближения к истинному значению.

*Задача апостериорной оценки точности* – вычисление характеристик точности результатов измерений и уравненного значения измеряемой величины.

Наилучшее приближение к истинному значению должно обладать следующими свойствами:

- состоятельности;
- несмещенности;
- эффективности.

В случае неравноточных измерений такими свойствами обладает **общая арифметическая середина** (средневзвешенное).

$$\overline{x} = \frac{[p_i x_i]}{[p_i]} = \frac{p_1 x_1}{[p_i]} + \frac{p_2 x_2}{[p_i]} + \dots + \frac{p_n x_n}{[p_i]}.$$

# ОБРАБОТКА РЯДА НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Для апостериорной оценки точности необходимо вычислить поправки к результатам измерений по формуле:

$$v_i = \overline{x} - x_i \,.$$

Контролем вычисления поправок служит выполнение равенства:

$$[p_i v_i] = 0 \,.$$

Далее вычисляют:

СКП единицы веса $\mu = \sqrt{\frac{[p_i v_i^2]}{n-1}}$ .

СКП СКП единицы веса $m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}$ .

Вес наилучшего приближения $p_{\overline{x}} = n$ .

СКП наилучшего приближения $m_{\overline{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$ .

СКП любого измерения $m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}$.

Предельную погрешность наилучшего приближения $\Delta_{\text{пред.}\overline{x}} = t m_{\overline{x}}$ .

# ОБРАБОТКА РЯДА НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

**Пример 5.4.** На репер по пяти ходам геометрического нивелирования различной длины передана высота, при этом получены следующие результаты. Требуется произвести математическую обработку ряда неравноточных измерений.

| № хода | Высота репера Hi, м | Длина хода Li, км |
|---|---|---|
| 1 | 141,487 | 4,5 |
| 2 | 141,396 | 3,7 |
| 3 | 141,492 | 5,7 |
| 4 | 141,526 | 3,7 |
| 5 | 141,477 | 9,1 |

а) В качестве уравненного значения (наилучшего приближения) принимается **общая арифметическая середина**:

$\overline{H} = \frac{[p_i H_i]}{[p_i]} = 141{,}473 \text{ м}$ , где $p_i = \frac{k}{L_i}$ -вес определения высоты репера по i-му ходу. Значение k следует выбирать таким образом, чтобы вес был близким к единице. В нашем примере k=6.

б) Вычислить СКП единицы веса:

$\mu = \sqrt{\frac{[p_i v_i^2]}{n-1}} = 0{,}0609 \text{ м} = 60{,}9 \text{ мм.} \approx 61 \text{ мм}$ , где $v_i = \overline{H} - H_i$ - вероятнейшая поправка в i-е значения высоты репера.

в) Вычислить СКП СКП единицы веса: $m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = 0{,}0076 \text{ м} = 7{,}6 \text{ мм.}$

Так как $m_\mu$ выражается в целых миллиметрах, то значение $\mu$ следует округлить тоже до целых миллиметров.

# ОБРАБОТКА РЯДА НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

г) Вычислить СКП наилучшего приближения:

$m_{\overline{H}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} =$ $0{,}0243$ м $= 20{,}3$ мм $\approx 20$ мм.

д) Вычислить предельную погрешность наилучшего приближения:

$\Delta_{\text{пред.}\overline{H}} = t m_{\overline{H}} = 3 * 20\text{мм} = 60$ мм.

| № хода | Hi, м | Li, км | k=6 p=k/Li | $p_iH_i$ | $v_i = \overline{H} - H_i$ | $p_i v_i$ | $p_i v_i^2$ | $m_{H_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 141,487 | 4,5 | 1,33 | 188,649 | -0,014 | -0,018 | 0,0002 | 0,0527 |
| 2 | 141,396 | 3,7 | 1,62 | 229,291 | 0,077 | 0,125 | 0,0097 | 0,0478 |
| 3 | 141,492 | 5,7 | 1,05 | 148,939 | -0,019 | -0,020 | 0,0004 | 0,0593 |
| 4 | 141,526 | 3,7 | 1,62 | 229,502 | -0,053 | -0,085 | 0,0045 | 0,0478 |
| 5 | 141,477 | 9,1 | 0,66 | 93,282 | -0,004 | -0,002 | 0,0000 | 0,0750 |
| сумма | 707,378 | 26,7 | 6,29 | 889,662 | | 0,000 | 0,0148 | |
| $\overline{H} = \frac{[pH]}{[p]}$ | 141,473 | Наилучшее приближение – среднее взвешенное – общая арифметическая середина | | | | | | |
| $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$ | 0,0609 | СКП единицы веса | | | | | | |
| $m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}$ | 0,0076 | СКП СКП единицы веса | | | | | | |
| $m_{\overline{H}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$ | 0,0243 | СКП наилучшего приближения | | | | | | |

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО НЕВЯЗКАМ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Условное уравнение - это любое математическое соотношение, которое связывает *истинные* значения всех измеряемых величин: $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$.

Число условных уравнений равно числу избыточных измерений, например:

1) в треугольнике измерены все углы; тогда условное уравнение примет вид: $X_1 + X_2 + X_3 - 180° = 0$.

2) между двумя точками с известными высотами $H_A$ и $H_B$ проложен нивелирный ход с n станциями. Условное уравнение будет иметь вид: $X_1 + X_2 + \dots + X_n - (H_B - H_A) = 0$.

3) в теодолитном ходе, проложенном между двумя исходными сторонами, измерены все углы и стороны; в этом случае возникает три условных уравнения:

$\sum_{i=1}^{n} \beta_i - (\alpha_{\text{кон.}} - \alpha_{\text{нач.}} + 180° * n) = 0$;

$\sum_{i=1}^{n} S_i \cos \alpha_i - (X_{\text{кон.}} - X_{\text{нач.}}) = 0$;

$\sum_{i=1}^{n} S_i \sin \alpha_i - (Y_{\text{кон.}} - Y_{\text{нач.}}) = 0$.

Если в условные уравнения вместо истинных значений подставить результаты измерений, то в правой части вместо нуля, как правило, появится величина, называемая *свободным членом условного уравнения или невязкой*: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = W$ .

*Свойства невязок: 1) невязка* - истинная погрешность, так как ее теоретическое значение равно 0; 2) невязка появляется из-за погрешностей измерений, поэтому её можно представить как сумму систематической и случайной погрешностей: $W = \Delta_W + \theta_W$ .

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО НЕВЯЗКАМ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Если априори **известно**, что систематическое погрешности в результатах измерений **отсутствуют**, тогда для оценки точности можно применить следующие формулы:

Для угловых измерений – $\mu_\beta^2 = \frac{[\frac{W_i^2}{n_i}]}{N}$, где $W_i$- ряд невязок, $n_i$ – количество измеренных углов в i- м ходе (полигоне), N – количество невязок.

Для невязок в ходах геометрического нивелирования – $\mu_h^2 = \frac{[\frac{W_i^2}{n_i}]}{N}$ или $\mu_h^2 = \frac{[\frac{W_i^2}{L_i}]}{N}$, где $n_i$-число станций в i-м ходе $L_i$ -длина хода.

Если априори **не известно**, что систематические погрешности в результатах измерений **отсутствуют**, тогда для оценки точности можно применить следующие формулы:

Для угловых измерений – $\mu_\beta^2 = \frac{\left[\frac{W_i^2}{n_i}\right] - [n_i]\theta_\beta^2}{N-1}$, где $\theta_\beta = \frac{[W_i]}{[n_i]}$ - систематическая погрешность измерения одного угла.

Для невязок в ходах геометрического нивелирования – $\mu_h^2 = \frac{\left[\frac{W_i^2}{n_i}\right] - [n_i]\theta_{h\text{ст.}}^2}{N-1}$ или $\mu_h^2 = \frac{\left[\frac{W_i^2}{L_i}\right] - [L_i]\theta_{h\text{км.}}^2}{N-1}$,

где $\theta_{h\text{ст.}}$ - систематическая погрешность на станции, $\theta_{h\text{км.}}$ - систематическая погрешность на 1 км хода.

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО НЕВЯЗКАМ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Систематические погрешности считаются значимыми, если выполняется неравенство:

$$|\theta| \geq \frac{t*\mu}{\sqrt{[n_i]}} \text{ или } |\theta| \geq \frac{t*\mu}{\sqrt{[L_i]}},$$

где t – коэффициент, принимающий значения 2; 2,5 или 3.

Для правильного округления окончательного значения СКП вычисляют её СКП:

$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2N}}$ - если нет систематических погрешностей

или $m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(N-1)}}$ – если систематические погрешности присутствуют.

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО НЕВЯЗКАМ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Пример 6.1.** Вычислить СКП измерения угла по невязкам в полигонах и ходах. Исследовать результаты измерений на наличие систематической погрешности.

Решение.

Вычисляем систематическую погрешность $\theta_\beta = \frac{[W_i]}{[n_i]} = -0{,}03$ .

Вычисляем СКП единицы веса (СКП измерения одного угла)

$$\mu_\beta = \sqrt{\frac{\left[\frac{W_i^2}{n_i}\right] - [n_i]\theta_\beta^2}{N-1}} = 0{,}63' .$$

Вычисляем оценку значимости систематической погрешности

$$\frac{2\mu}{\sqrt{[n_i]}} = 0{,}12.$$

Так как $|\theta| < \frac{2\mu}{\sqrt{[n_i]}}$ ( 0,03 <0,12) $\rightarrow$ систематические погрешности в результатах измерений отсутствуют.

Вычисляем надежность определения $\mu_\beta : m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2N}} = 0{,}22'$.

Ответ: СКП измерения угла $m_\beta = \mu_\beta = 0{,}63' \approx 0{,}6'$

| № хода (полигона) | Угловая невязка W' | Число измеренных углов n | $\frac{W^2}{n}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,8 | 18 | 0,180 |
| 2 | -2,4 | 30 | 0,192 |
| 3 | -2,5 | 25 | 0,250 |
| 4 | 3,0 | 14 | 0,643 |
| 5 | -3,2 | 25 | 0,410 |
| Сумма | -3,3 | 112 | 1,674 |
| $\theta_\beta$ | -0,03 | | |
| $\mu_\beta^2$ | 0,39 | | |
| $\mu_\beta$ | 0,63 | | |
| $\frac{2\mu}{\sqrt{[n_i]}}$ | 0,12 | | |
| $m_\mu$ | 0,22 | | |

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО НЕВЯЗКАМ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Пример 6.2.** Выполнить оценку точности результатов геометрического нивелирования и исследовать наличие систематической погрешности.

Решение.

Вычисляем систематическую погрешность $\theta_h = \frac{[W_i]}{[L_i]} = -0{,}14$ .

Вычисляем СКП единицы веса (СКП превышения на 1 км хода).

$\mu_h = \sqrt{\frac{\left[\frac{W_i^2}{L_i}\right] - [L_i]\theta_h^2}{N-1}} = 13{,}47$ мм. Вычисляем оценку значимости систематической погрешности $\frac{2\mu}{\sqrt{[L_i]}} = 4{,}55.$

Так как $|\theta| < \frac{2\mu}{\sqrt{[n_i]}}$ ( 0,14 <4,55) $\rightarrow$ систематическая погрешность в результатах измерений отсутствует.

Вычисляем надежность определения $\mu_h$ : $m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2N}} = 4{,}26.$

Ответ: СКП единицы веса (СКП превышения на 1 км хода)

$m_h = \mu_h = 13{,}47$ мм $\approx 13$ мм

| № хода (полигона) | Невязка W, мм | Длина хода L, км. | $\frac{W^2}{L}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 4 | 64,0 |
| 2 | 24 | 6 | 96,0 |
| 3 | -42 | 14 | 126,0 |
| 4 | -36 | 5 | 259,2 |
| 5 | 33 | 6 | 181,5 |
| Сумма | -5 | 35 | 726,7 |
| $\theta_h$ | -0,14 | | |
| $\mu_h^2$ | 181,50 | | |
| $\mu_h$ | 13,47 | | |
| $\frac{2\mu}{\sqrt{[L_i]}}$ | 4,55 | | |
| $m_\mu$ | 4,26 | | |

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО НЕВЯЗКАМ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Пример 6.3.** Выполнить оценку точности результатов геометрического нивелирования и исследовать наличие систематической погрешности.

Решение.

Вычисляем систематическую погрешность $\theta_h = \frac{[W_i]}{[n_i]} = -0{,}07$ .

Вычисляем СКП единицы веса (СКП превышения на станции)

$\mu_h = \sqrt{\frac{\left[\frac{W_i^2}{n_i}\right] - [n_i]\theta_h^2}{N-1}} = 7{,}28$ мм. Вычисляем оценку значимости систематической погрешности $\frac{2\mu}{\sqrt{[n_i]}} = 1{,}09$.

Так как $|\theta| < \frac{2\mu}{\sqrt{[n_i]}}$ ( 0,07 <1,09) → систематическая погрешность в результатах измерений отсутствует.

Вычисляем надежность определения $\mu_h$ : $m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2N}} = 3{,}30$.

Ответ: СКП единицы веса (СКП превышения на станции $m_h = \mu_{h\text{ст.}} = 7{,}28$ мм $\approx 7$ мм.

| № хода (полигона) | Невязка W, мм | Число станций n | $\frac{W^2}{n}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | -38 | 26 | 55,5 |
| 2 | -41 | 53 | 31,7 |
| 3 | 48 | 62 | 37,2 |
| 4 | 38 | 22 | 65,6 |
| 5 | -19 | 16 | 22,6 |
| Сумма | -12 | 179 | 212,6 |
| $\theta_h$ | -0,07 | | |
| $\mu_h^2$ | 52,95 | | |
| $\mu_h$ | 7,28 | | |
| $\frac{2\mu}{\sqrt{[n_i]}}$ | 1,09 | | |
| $m_\mu$ | 2,30 | | |

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

- Измерение угла полным приемом (при двух положениях круга).
- Определение превышения по двум сторонам реек или при двух горизонтах прибора.
- Измерение линии в прямом и обратном направлениях.

При достаточном количестве парных измерений их можно использовать для оценки точности выполненных измерений.

Пусть имеется n пар измерений однородных физических величин, при этом измерения внутри пар равноточные, а между парами – неравноточные: $x_1', x_1'' \quad p_1;$

$$x_2', x_2'' \quad p_2;$$

.............

$$x_n', x_n'' \quad p_n.$$

Каждой паре измерений соответствует условное уравнение: $X_i - X_i = 0$

Если вместо истинных значений подставить результаты измерений, то вследствие погрешностей измерений получим уравнение вида: $x_i' - x_i'' = d_i$.

Так как $x_i'$и $x_i''$ величины равноточные тогда вес полученных невязок можно вычислить по формуле:

$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i} = \frac{2}{p_i}$, откуда $p_{d_i} = \frac{p_i}{2}$, → вес *разности* двух равноточных измерений в 2 раза меньше веса каждого измерения.

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Вариант 1. Априори **известно**, что систематические погрешности **отсутствуют**:

СКП единицы веса рассчитывается по формуле: $\mu = \sqrt{\frac{[p_{d_i} d_i^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[p_i d_i^2]}{2n}}$

Вариант 2. Априори **не известно**, что систематические погрешности в результатах измерений **отсутствуют**:
Величина систематической погрешности, приходящаяся на измерение с единичным весом, вычисляется по формуле:$\theta = \frac{[d]}{[\frac{1}{p_{d_i}}]} = \frac{[d]}{2[\frac{1}{p_i}]}$.

СКП единицы веса вычисляется по формуле: $\mu = \sqrt{\frac{[p_d d^2] - \frac{[d]^2}{[\frac{1}{p_d}]}}{n-1}} = \sqrt{\frac{[pd^2] - \frac{[d]^2}{[\frac{1}{p}]}}{2(n-1)}}$.

Систематическая погрешность признается значимой, если выполняется неравенство:

$$|\theta| \geq \frac{t\mu}{\sqrt{\left[\frac{1}{p_{d_i}}\right]}} = \frac{t\mu}{\sqrt{2\left[\frac{1}{p_i}\right]}} .$$

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

**Пример 7.1.** Выполнить оценку точности угловых измерений по разностям двойных измерений направлений, измеренных теодолитом Т-30 и исследовать наличие систематической погрешности. Разность $d_i = \text{КЛ}_i - \text{КП}_i$ представляет собой двойную коллимационную ошибку. Все измерения направлений получены с одинаковой погрешностью, то есть $p_{\text{КЛ}_i} = p_{\text{КП}_i} = 1$, а $p_{d_i} = \frac{1}{2}$ → наилучшая оценка коллимационной ошибки $\theta = c = \frac{[d]}{2n}$, а СКП измерения одного направления при одном положении круга $\mu = m_{\text{напр.}} = \sqrt{\frac{[d^2] - \frac{[d]^2}{n}}{2(n-1)}}$. Коллимационная ошибка принимается значимой, если выполняется неравенство: $|c| \geq \frac{2m_{\text{напр.}}}{\sqrt{2n}}$ → 0,9 >0,25 → **коллимационную погрешность следует признать значимой**.

| № | КЛ | КП | d=КЛ-КП | d^2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $23^0\,19'$ | $203^0\,18'$ | 1 | 1 |
| 2 | $43^0\,33'$ | $223^0\,30'$ | 3 | 9 |
| 3 | $135^0\,44'$ | $315^0\,46'$ | 2 | 4 |
| 4 | $156^0\,06'$ | $336^0\,07'$ | 1 | 1 |
| 5 | $161^0\,59'$ | $341^0\,57'$ | 2 | 4 |
| 6 | $187^0\,29'$ | $07^0\,28'$ | 1 | 1 |
| 7 | $193^0\,39'$ | $13^0\,37'$ | 2 | 4 |
| 8 | $198^0\,45'$ | $18^0\,43'$ | 2 | 4 |
| | | | 14 | 28 |
| c | 0,9 | | | |
| μ=m_(напр.) | 0,5 | | | |
| $\frac{2m_{\text{напр.}}}{\sqrt{2n}}$ | 0,25 | | | |

# ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Найти СКП превышения, полученного на одной станции геометрического нивелирования по черным сторонам реек, если СКП отсчета по рейке $m_o$ равна 1 мм.
2. Найти СКП среднего из превышений, полученных на станции геометрического нивелирования по черным и красным сторонам реек, если СКП отсчета равна 1 мм.
3. Вычислить расстояние, определенное по дальномерной формуле D=Kl+c и его СКП, если l = 220±0,5 см, а величины к =100 и с = 0,00 м определены с высокой степенью точности и поэтому могут быть приняты за безошибочные.
4. Вычислить предельную погрешность (допустимую невязку) в сумме углов полигона, имеющего 12 углов, зная, что СКП измерения каждого угла равна 30".
5. Чему равна СКП дирекционного угла 10-й линии теодолитного хода, если СКП каждого угла хода равна 5", а исходный дирекционный угол принят за точный?
6. Вычислить СКП приращения $\Delta x = S\ \cos\alpha$ и $\Delta y = S \sin\alpha$, если s = 489,98±0,11 м и α =144°30,0'±1,0'.
7. Вычислить превышение по формуле $h = 0{,}5D' \sin 2\nu + i - v$ и найти его СКП, если
D' = кl + с= 146±1,0 м; ν = +3°28'±0,5' (на верх рейки); *i*= 1,40+0,01 м; *V*= 3,01±0,02 м.
8. Определить коэффициент дальномера и его СКП, имея D = 135,67±0,6 м, с = 0,00±0,01 м и l=134±0,5 см.
9. Вычислить СКП площади прямоугольника, если эта площадь получена по измеренным его сторонам, а = 236,41±0,11 м и b= 102,74±0,05 м.

# ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

10. Вычислить недоступное расстояние АС и его СКП по измеренной стороне АВ= 64,19±0,03м и измеренным углам А = 42°15,0'±0,5$^{/}$ и В = 56°21,0'±0,5'.
11. Веса результатов измерений горизонтальных углов соответственно равны 0,5; 1,0; 1,5; 2,0. Вычислить их средние квадратические погрешности, если СКП единицы веса равна 10ʺ.
12. Два угла треугольника измерены равноточно, а третий получен из вычислений. Найти вес третьего угла.
13. Результат измерения со средней квадратической погрешностью m имеет вес р. Определить среднюю квадратическую погрешность μ измерения с весом, равным единице.
14. Угол со средней квадратической погрешностью *m* = 5" имеет вес 1. Сколько приемов нужно сделать прибором, дающим результат со средней квадратической погрешностью одного измерения *m* = + 30", чтобы получить такой же вес?
15. Вычислить вес высоты репера, полученной по ходу геометрического нивелирования длиной 11 км., если вес превышения, полученного по ходу в 1 км. принят за единицу.
16. В теодолитном ходе равноточно измерены горизонтальные углы $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$. Определить вес дирекционного угла n-й линии хода, при условии, что исходный дирекционный угол безошибочен.