

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ

**ИНСТИТУТ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ
«ИНФОРМКАДАСТР»**

ГЕОДЕЗИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

для слушателей, обучающихся по программам дополнительного
профессионального образования

Москва 2010

Учебное пособие по дисциплине «Геодезия» для слушателей, обучающихся по программам дополнительного профессионального образования

Учебное пособие разработано на кафедре геодезии и геоинформатики ГУЗа.

Авторский коллектив:

Проф. Беликов А.Б. – руководитель коллектива

Проф. Баранов В.Н.

Проф. Юнусов А.Г.

Ст. преподаватель Каширкин Ю.Ю.

Ассистент Докукин П.А.

Аспирант Костеша В.А.

Методическое пособие одобрено на заседании кафедры геодезии и геоинформатики

Протокол № _____ от _____ 2010 г.

Методическое пособие одобрено на Учебно-методическом совете ИПК «Информкадастр».

Протокол № _____ от _____ 2010 г.

Рекомендовано в качестве учебного пособия УМО ГУЗ

Протокол № _____ от _____ 2010 г.

Оглавление

1. Геодезическая основа государственного кадастра недвижимости	5
1.1. Методы описания земельных участков	5
1.2. Измерения на местности	7
1.2.1. Единицы измерений	7
1.2.2. Элементы измерений на местности	9
1.3. Ориентирование линий	11
1.4. Решение геодезических задач на плоскости	13
1.4.1. Прямая геодезическая задача	13
1.4.2. Обратная геодезическая задача	14
1.4.3. Преобразование координат на плоскости	15
1.5. Основные понятия теории погрешностей	16
1.5.1. Основные определения	16
1.5.2. Классификация измерений	18
1.5.3. Погрешности результата измерения	19
1.5.4. Числовые характеристики точности измерений	22
1.5.5. Оценка точности результатов измерений по истинным (действительным) погрешностям	23
1.5.6. Оценка точности функций результатов измерений	23
1.5.7. Веса результатов измерений	24
1.5.8. Оценка относительной точности функций результатов измерений	25
1.5.9. Математическая обработка результатов измерений одной и той же величины	26
1.5.10. Практическое применение приемов теории погрешностей для решения задач межевания	27
1.6. Простейшие геодезические построения на местности	38
1.6.1. Полярный метод	39
1.6.2. Проложение линейно-углового хода (теодолитный ход)	39
1.6.3. Прямая засечка	40
1.6.4. Линейная засечка	41
1.6.5. Обратная засечка	41
1.7. Форма и размеры Земли	42
1.8. Системы координат (СК), принятые в геодезии	44
1.8.1. Система геоцентрических пространственных прямоугольных координат	44
1.8.2. Референциальная система координат	45
1.8.3. Плоские прямоугольные координаты. Государственная система координат	46
1.8.4. Порядок перехода от линий и площадей местности на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера	49
1.8.5. Местные системы координат	53
1.8.6. Переход от геодезических координат к плоским прямоугольным координатам и обратно	54
1.9. Системы высот, принятые в геодезии	57
1.10. Государственная геодезическая сеть	57
1.10.1. Исторический очерк создания ГГС в России	59
1.10.2. Структура и характеристика ГГС по состоянию на 1995 год	63
1.10.3. Современная структура Государственной геодезической сети	63
1.10.4. Опорные межевые сети	64
1.11. Понятие об уравнивании и оценке точности различных геодезических построений	67
1.12. Современные геодезические приборы и методы определения координат точек	70

1.12.1. Электронные тахеометры	70
1.13.2. Спутниковые геодезические измерения	71
1.13.2.1. Основы электронной дальнометрии	71
1.13.2.2. Глобальные спутниковые системы	77
1.13.2.3. Основные принципы определения местоположения точек и линий на земной поверхности с применением спутниковых систем	
1.13.2.4. Технологическая последовательность и режимы спутниковых измерений	
1.13.2. Требования к спутниковым измерениям при построении ОМС	

1. Геодезическая основа государственного кадастра недвижимости

1.1. Методы описания земельных участков

Земельный участок как объект собственности, а, следовательно, как вид товара, имеет свойства, особенности только ему принадлежащие. Любая собственность, вне зависимости от ее характера, вида, происхождения, может быть:

- а) перемещена в пространстве;
- б) уничтожена, либо воспроизведена в том или ином виде.

Этими свойствами обладают все виды собственности, кроме земельных участков. Ни один земельный участок не может быть перемещен в пространстве, не может быть уничтожен, не может быть воспроизведен заново.

Эти уникальные свойства земельных участков создает особые требования при учете каждого земельного участка. Как описать земельный участок, учитывая его особенности как элемента собственности или товара?

Описывать земельный участок возможно различными методами.

Прежде всего - это метод словесного описания границ участка относительно каких то постоянных предметов местности и стран света. Однако такое описание не позволяет ни определить протяженность участка в пространстве, ни вычислить его площадь (а как исчислять налоги на землю?). А как при таком описании решать земельные споры, когда спорящие стороны пытаются отвоевать друг у друга полосу шириной менее метра?

Описать расположение земельного участка можно графически в виде приближенной схемы. Но здесь возникают те же вопросы, что и при словесном описании земельного участка, если рисунок не обладает метрическими свойствами, т.е. нет возможности производить измерения по чертежу с достаточно высокой степенью точности.

Графика может дать достаточно хорошие результаты, при условии, что имеем дело с планово – картографическим материалом. Вопросы отображения земельных участков рассмотрены во второй главе «Картографическое обеспечение кадастровых работ». Однако, уже здесь следует отметить, что картографическая информация далеко не всегда обеспечивает необходимую точность определения положения земельного участка.

Наиболее полную возможность описания земельного участка дает нам предложенная французским математиком Рене Декартом (1596-1650) прямоугольная система координат на плоскости. В основе такой системы лежит две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY с одинаковыми масштабами по осям.. Точка пересечения координатных осей O – от французского слова *origo* – *начало*.

В геодезии используется система координат (Рис 1.1), в которой углы отсчитываются от северного направления оси OX по ходу часовой стрелки.

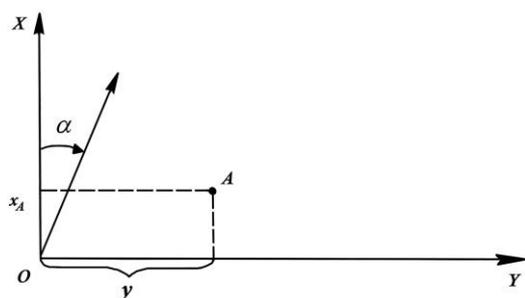


Рис.1.1. Система координат, принятая в геодезии

Положение любой точки A в выбранной системе прямоугольных координат определяется координатами, т.е. парой чисел $(X_A; Y_A)$.

Принципиально можно описать положение любого земельного участка, используя прямоугольную систему координат (Рис.1.2).

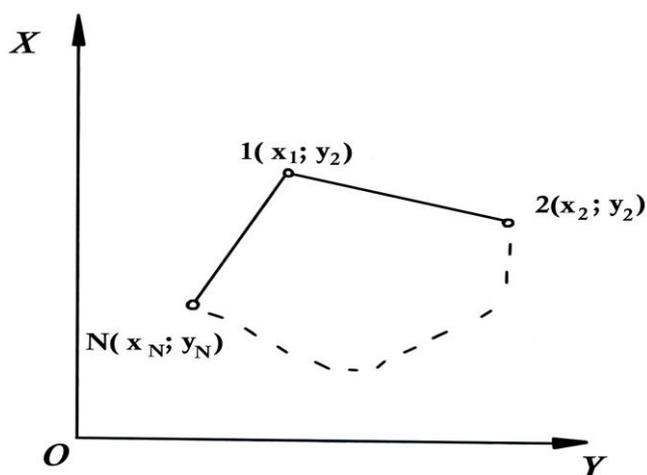


Рис.1.2. Описание земельного участка методом координат его вершин

Для этого в выбранной системе координат достаточно определить координаты углов поворота сторон заданного земельного участка. Если эта система координат распространена на всю территорию государства, то положение любого участка определяется вполне однозначно без перекрытий и разрывов. Все это легко и просто сделать на листе бумаги, где нарисованы две взаимно перпендикулярные прямые, т.е. **задана система координат**.

Но в практической жизни возникает масса вопросов. Прежде всего, а как задать систему прямоугольных координат на земной поверхности? Предположим, что эта задача решена, и мы имеем на поверхности Земли две взаимно перпендикулярные прямые. Тогда возникает второй вопрос: а как непосредственно на местности провести определение координат $X_A; Y_A$ для заданной точки A ? При этом необходимо учесть, что территория, на которой

мы проживаем, существенно больше листа бумаги с нарисованной системой прямоугольных координат.

1.2. Измерения на местности

1.2.1. Единицы измерений

В геодезии измеряются различные величины (под величиной понимают количественную характеристику физического тела, явления или процесса). Измерить величину — значит определить ее числовое значение в принятых единицах измерения (метр, квадратный метр, градус и т. д.).

За единицу линейных измерений (расстояний, горизонтальных приложений, высот, превышений) в геодезии принят метр; за единицу измерений горизонтальных и вертикальных углов — градус, минута, секунда. Первоначальная длина метра по предложению Комиссии Парижской академии наук от 19 марта 1791 г. равнялась одной десятиллионной части отрезка дуги Парижского меридиана от полюса до экватора. В 1799 г. был изготовлен образец метра в виде жезла из Платины. Он получил название «архивный метр». В 1889 г. с «архивного метра» была изготовлена 31 копия-жезл из 90 % платины и 10% иридия. Копии названные *эталоны*. Три эталона хранятся в помещении

Международного бюро мер и весов в Севре, около Парижа, а остальные распределены между странами-участницами в качестве их национальных эталонов. Россия получила эталон № 11, хранящийся в Академии наук России, и №28, хранящийся в НИИ метрологии им. Д.И.Менделеева в Санкт-Петербурге. В XX в. метрическая система легла в основу современной Международной системы единиц или сокращенно «система СИ» (Si-System International), которую сейчас повсеместно используют науке, технике, образовании и народном хозяйстве.

Основные единицы (механические):

Длина, метр (м)	1 м равен расстоянию, которое свет проходит в вакууме за $1/299792458$ доли секунды ¹
Масса, килограмм (кг)	1 кг равен массе международного прототипа килограмма, который хранится в Севре (Франция)
Время, секунда (с)	1 с равна 9192631770 периодам колебаний электромагнитного излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия

Дополнительные единицы (геометрические):

Плоский угол, радиан (рад.)	Радиан — угол между двумя радиусами окружности, опирающегося на дугу, по длине равную радиусу
-----------------------------	---

Производные единицы (пространства, времени и механические):

Скорость, метр в секунду (м/с)	1 м/с — скорость прямолинейно и равномерно движущейся точки, при которой она за время 1 с проходит путь 1 м
--------------------------------	---

Ускорение, метр в секунду за секунду (м/с^2)	1 м/с^2 — ускорение прямолинейно и равноускоренно движущейся точки, при котором за время 1 с скорость точки изменяется на 1 м/с
Площадь, квадратный метр (м^2)	1 м^2 — площадь квадрата с длиной стороны, равной 1 м
Объем, кубический метр (м^3)	1 м^3 — объем куба с длиной ребра, равной 1 м
Частота, герц (Гц)	Герц — частота, при которой за время 1 с происходит один цикл периодического процесса ($\text{Гц} = 1/\text{с}$)
Давление, паскаль (Па); бар (10^5 Па)	Н/м^2 (сила в один ньютон на квадратный метр); 1 мм ртутного столба = 133,3 Па; 1 атмосфера = 760 мм рт. столба = 101 325 Па

Несистемные величины:

Диапазон измеряемых величин очень широк и разнообразен, поэтому допускается применение исторически сложившихся и прочно вошедших в геодезическое производство несистемных единиц. Это десятичные кратные (образованные умножением на 10, 100, 1000 и т.д.) и десятичные дольные (образованные умножением на 0,1; 0,01; 0,001 и т.д.) от единиц системы СИ и др.

Для измерения горизонтальных и вертикальных углов используют следующие угловые единицы:

1 градус = $1^\circ = 1/90$ часть прямого угла или $1/360$ часть окружности;

1 минута = $1' = 1/60$ часть градуса = $0^\circ 01' 00''$ (60");

1 секунда = $1'' = 1/60$ часть минуты = $0^\circ 00' 01''$;

1 град = $1^g = 1/100$ часть прямого угла или $1/400$ часть окружности;

$1^s = 100^e$ (десятичных минут);

1^e десятичная минута = 100^{ce} (десятичных секунд);

1^{ce} десятичная секунда = $0,000 1^g$.

Между угловыми единицами имеются следующие зависимости:

$1^\circ = 1,1^g$; $1^g = 0,9^\circ$;

$1' = 1,851^e$; $1^e = 0,54'$;

$1'' = 3,086 419 75^{ce}$; $1^{ce} = 0,324''$.

В современной практике геодезического приборостроения применяют новые угловые единицы — гон и миллигон:

1 гон = $1^g = 0,9''$;

1 гон = 1000 мгон;

1 мгон = $0,001 \text{ гон} = 0,1^e = 10^{ce} = 3,21$.

Для измерения длин линий:

1 километр (км) = 1000 м;

1 дециметр (дм) = 0,1 м;

1 сантиметр (см) = 0,01 м; 1 миллиметр (мм) = 0,001 м.

Для измерения площадей:

1 километр квадратный (км^2) = $1\ 000\ 000 \text{ м}^2 = 100 \text{ га}$;

1 гектар (га) = $10\ 000 \text{ м}^2$;

1 дециметр квадратный (дм^2) = $0,01 \text{ м}^2$;

1 сантиметр квадратный (см^2) = $0,000 1 \text{ м}^2$;

1 миллиметр квадратный (мм^2) = $0,000 001 \text{ м}^2$

1.2.2. Элементы измерений на местности

На картах, планах и профилях изображают контуры (очертания) различных объектов местности: земельных участков, землепользовании крестьянских хозяйств, сельскохозяйственных угодий, берегов рек, морей, каналов, дорог, строений и т. д. Чтобы нанести контур на карту, план или профиль, выбирают характерные точки, например вершины углов ломаных контуров, определяют их взаимное положение, наносят на план или профиль, после чего соединяют прямыми линиями. При этом всегда руководствуются основным принципом геодезии — от общего к частному, состоящим в том, что вместо взаимного определения положения большого числа характерных точек выбирают несколько основных, устанавливают положение одной относительно другой, затем относительно основных точек определяют положение характерных контурных, наносят их на карту, план или профиль с таким расчетом, чтобы можно было с требуемой детальностью изобразить интересные объекты местности.

Взаимное положение точек местности определяют измерением пиний (расстояний) между точками и углов между направлениями линий, соединяющих точки. Линии измеряют различными мерными приборами, для измерения углов используют угломерные приборы. Взаимное расположение точек A и B на местности определяют измерением расстояния AB .

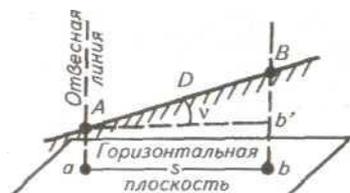


Рис. 1.3. Проекция линии местности на горизонтальную плоскость

При выполнении геодезических работ на небольшой территории, линию местности AB проецируют ортогонально на горизонтальную плоскость, т. е. на плоскость, перпендикулярную к отвесной линии (рис.1.3). В проекции получают прямую ab , называемую горизонтальным проложением линии AB местности. Таким образом, *горизонтальным проложением* называют ортогональную проекцию линии местности на горизонтальную плоскость. Его используют для составления плана.

Изображение участка земной поверхности на бумаге без учета кривизны Земли на горизонтальной плоскости значительно упрощает геодезические вычисления. Возникает вопрос — на какой площади поверхность Земли можно принимать за плоскость? Естественно, чем больше площадь, а следовательно, расстояние AB , тем больше будет сказываться кривизна Земли. Так, при $AB = 22$ км искажение, связанное с кривизной Земли будет

равно равна 0,022 м, что составляет 1/1 000 000 от 22 км. С такой точностью измеряют линии высокоточными измерительными приборами. Поэтому и считают, что кривизну Земли можно не учитывать и линии местности проецировать на горизонтальную плоскость на площади 22 км - 22 км = 500 км² = 50 000 га. Несколько позже будет рассмотрен вопрос о более полном учете формы Земли при обработке геодезических измерений.

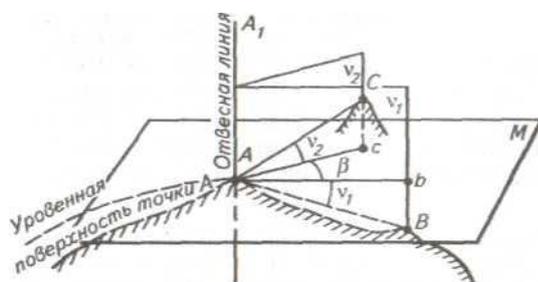


Рис. 1.4. Горизонтальный угол и углы наклона

Углы, которые измеряют на местности, — это горизонтальные углы и углы наклона (вертикальные). Принцип измерения горизонтального угла состоит в том, что через вершину угла A (рис. 1.4) мысленно проводят горизонтальную плоскость M перпендикулярную отвесной линии, проходящей через точку A . Затем направления линий AB и AC местности проецируют вертикальными плоскостями ν_1 и ν_2 , проходящими через отвесную линию AA_1 , на горизонтальную плоскость и в пересечении вертикальных и горизонтальных плоскостей получают линии Ab и Ac (горизонтальные проложения). Угол β , заключенный между линиями Ab и Ac , является горизонтальным. Следовательно, *горизонтальным* называют угол, заключенный между проекциями линий местности на горизонтальную плоскость.

Для получения представления о повышении и понижениях земной поверхности измеряют углы наклона ν_1 и ν_2 , заключенные между направлениями линий местности AB , AC и их проекциями Ab , Ac на горизонтальную плоскость. *Углом наклона* называют угол, образованный линией местности и горизонтальной плоскостью. Угол ν_1 расположенный ниже горизонтальной плоскости, называют *отрицательным углом наклона*, и перед его числовым значением ставят знак минус, а угол ν_2 , расположенный над горизонтальной плоскостью, — *положительным углом наклона*, и перед его числовым значением ставят знак плюс.

Измерив на местности длину линии $AB=D$ (рис. 1.3) и угол наклона ν горизонтальное проложение $ab = s$ вычисляют по формуле

$$s = D \cos \nu.$$

Вместо вычисления s по этой формуле или для контроля вычисления s можно в результат измерения D ввести поправку ΔD за наклон линии к

горизонту, которая показывает, насколько катет s короче гипотенузы D .

Тогда

$$S = D - \Delta D,$$

отсюда следует, что

$$\Delta D = S - D, \text{ или}$$

$$\Delta D = D - D \cos \nu = D(1 - \cos \nu) = 2D \sin^2 \frac{\nu}{2}.$$

Окончательно имеем

$$\Delta D = 2D \sin^2 \frac{\nu}{2}.$$

Вычисляя ΔD , определяют горизонтальное проложение. Поправку ΔD всегда вычитают из результата измерения D , так как катет всегда короче гипотенузы.

1.3. Ориентирование линий

При выполнении кадастровых работ требуется знать расположение объектов относительно стран света. Для этого линии на местности ориентируют относительно направления меридиана. В качестве ориентирующего угла служит *азимут* – горизонтальный угол, отсчитываемый от северного направления меридиана по ходу часовой стрелки до направления данной линии (Рис.1.5). Меридиан выбирают либо географический, либо магнитный; угол между направлениями меридианов (δ на Рис 1.5) называется *склонением магнитной стрелки*.

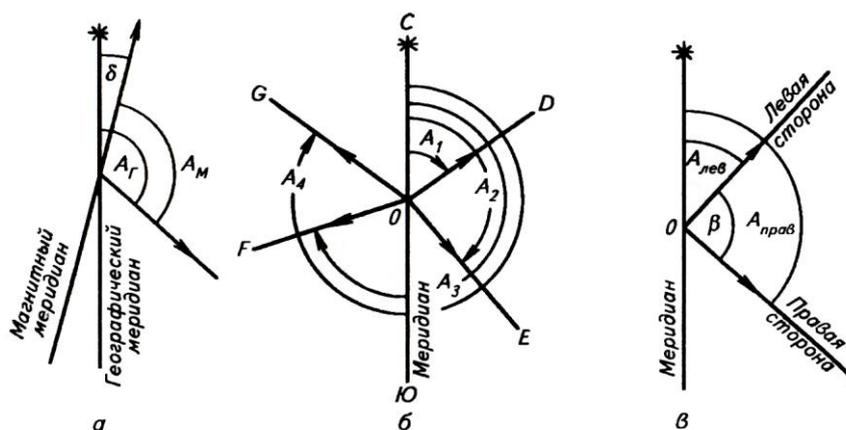


Рис. 1.5. Ориентирование линий по географическому и магнитному меридианам

Азимуты принимают значения от 0° до 360° . Однако использование азимутов для решения инженерных задач затруднительно, т.к. в различных точках прямой на местности азимуты направления меняются. Это происходит из-за того, что меридианы, проведенные в различных точках не

параллельны между собой, так как все они пересекаются в магнитном или географическом полюсах (Рис. 1.6.).

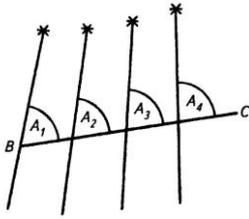


Рис. 1.6. Изменение азимута прямой линии в разных ее частях

По этой же причине прямой и обратный азимуты линии в начальной и конечной точках различаются между собой не точно на 180° (Рис. 1.7.).

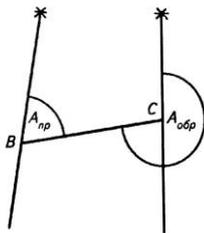


Рис. 1.7. Прямой и обратный азимуты заданной линии AB

В связи с этим для наглядности и упрощения работ переходят от азимутов к *дирекционным углам*. Для этого на территории зоны центральный меридиан зоны принимается за осевой (См. Раздел 1.8.3). Он же является осью абсцисс системы плоских прямоугольных координат зоны. Относительно этого меридиана проводится ориентирование всех линий зоны. *Дирекционным углом* называют горизонтальный угол, отсчитываемый от северного направления линии, параллельной осевому меридиану в направлении по ходу часовой стрелки до направления данной линии (Рис. 1.8.).

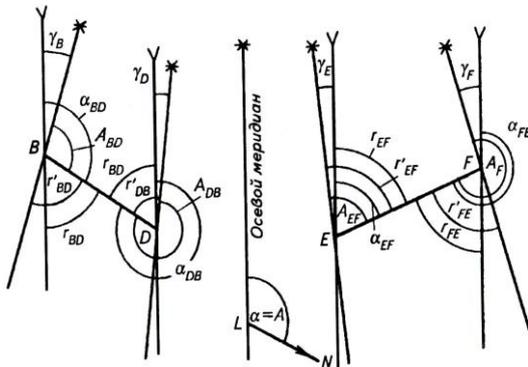


Рис. 1.8. Азимуты, дирекционные углы, румбы, сближение меридианов

Дирекционные углы, как и азимуты, принимают значения от 0° до 360° , но они не изменяются при перемещении вдоль прямой линии в пределах зоны. Разность между прямым и обратным дирекционными углами одной и

той же линии равна 180° . Разность между азимутом A и дирекционным углом α называют *сближением меридианов* γ , т.е.

$\gamma = A - \alpha$, на рис. 1.8 \surd обозначает направление, параллельное осевому меридиану.

Сближение меридианов можно определить как горизонтальный угол между меридианом в данной точке и линией, параллельной осевому меридиану. Сближение меридианов будет положительным для точек, расположенных к востоку от осевого меридиана, и отрицательным – для точек, расположенных к западу от осевого меридиана.

Абсолютное значение сближения меридианов увеличивается с удалением от осевого меридиана и с увеличением широты местности. Сближение меридианов и его знак могут быть определены по упрощенной формуле

$$\gamma = \Delta L \sin B,$$

где ΔL – разность долгот меридиана, проходящего через данную точку, и осевого меридиана,

B – широта точки.

Иногда для удобства вычислений и построений от дирекционных углов переходят к *румбам*.

Румбом называют горизонтальный угол, отсчитываемый от ближайшего (северного или южного) направления линии, параллельной осевому меридиану, до направления данной линии. Румбы изменяются от 0° до 90° . Чтобы направление линии было вполне определенным, значению румба приписывают название стран света: СВ, ЮВ, ЮЗ, СЗ.

1.4. Решение геодезических задач на плоскости

1.4.1. Прямая геодезическая задача

Прямая геодезическая задача состоит в том, что по известным (исходным) координатам начального пункта $A(X_A, Y_A)$ линии AB , дирекционному углу этой линии α_{AB} и ее горизонтальному проложению S_{AB} вычисляют координаты конечной точки $B(X_B, Y_B)$.

Для решения этой задачи необходимо вычислить приращения координат данной линии, т.е. проекции (горизонтального проложения) этой линии на оси прямоугольной системы координат. Приращения координат вычисляют по формулам

$$\Delta x_{AB} = S_{AB} \cos \alpha_{AB};$$

$$\Delta y_{AB} = S_{AB} \sin \alpha_{AB}.$$

Тогда координаты конечной точки получают по формулам

$$X_B = X_A + \Delta x_{AB};$$

$$Y_B = Y_A + \Delta y_{AB}.$$

1.4.2. Обратная геодезическая задача

Обратная геодезическая задача состоит в том, что по известным координатам конечных точек линии AB вычисляют дирекционный угол и горизонтальное проложение этой линии, т.е. известны X_A, Y_A, X_B, Y_B , необходимо найти α_{AB} и S_{AB} .

Задача решается двумя способами, но предварительно необходимо вычислить приращения координат, следуя правилу: **приращение координат равно разности координат конечной и начальной точек линии**. Эти вычисления бесконтрольные, поэтому приращения необходимо вычислять с особым вниманием.

Первый способ:

Вначале вычисляют дирекционный угол по формуле

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}}.$$

Для однозначного определения дирекционного угла следует учитывать знаки приращений координат. Соотношения между величиной дирекционного угла, названием румба и знаками приращений приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

Дирекционный угол линии	Название румба	Знаки приращений координат	
		Δx	Δy
0 - 90°	СВ	+	+
90° - 180°	ЮВ	-	+
180° - 270°	ЮЗ	-	-
270° - 360°	СЗ	+	-

Горизонтальное проложение вычисляют по формулам

$$S_{AB} = \frac{\Delta x_{AB}}{\cos \alpha_{AB}};$$

$$S_{AB} = \frac{\Delta y_{AB}}{\sin \alpha_{AB}}.$$

Сходимость результатов вычисления S_{AB} контролирует вычисление дирекционного угла и горизонтального проложения, но не контролирует вычисление приращений.

Второй способ.

По вычисленным приращениям координат вычисляют горизонтальное проложение

$$S_{AB} = \sqrt{\Delta x_{AB}^2 + \Delta y_{AB}^2}.$$

Далее дважды вычисляют дирекционный угол

$$\alpha_{AB} = \arccos \frac{\Delta x_{AB}}{S_{AB}};$$

$$\alpha_{AB} = \arcsin \frac{\Delta y_{AB}}{S_{AB}}.$$

1.4.3. Преобразование координат на плоскости

Преобразования координат на плоскости связаны с переходом от одной системы координат к другой. Здесь возможно несколько вариантов:

Параллельное перемещение осей координат

В системе координат XOY задана точка $A(X_A, Y_A)$. Имеется «новая» система координат $X'O'Y'$ с осями, параллельными «исходной» системе. В «исходной» системе координаты «нового» начала $O'(X_{O'}, Y_{O'})$. Необходимо вычислить координаты точки $A(X'_A, Y'_A)$ в «новой» системе. Перевычисление выполняется по следующим формулам

$$X'_A = X_A - X_{O'};$$

$$Y'_A = Y_A - Y_{O'}.$$

Разворот системы координат

В системе координат XOY задана точка $A(X_A, Y_A)$. Имеется «новая» система координат $X'O'Y'$ с осями, развернутыми по отношению к исходной на угол α . Угол считается от северного направления исходной оси OX по ходу часовой стрелки до северного направления оси OX' . Тогда координаты точки $A(X'_A, Y'_A)$ в новой системе координат будут равны

$$X'_A = X_A \cos \alpha + Y_A \sin \alpha;$$

$$Y'_A = -X_A \sin \alpha + Y_A \cos \alpha.$$

Масштабирование

Рассмотрим случай, когда изменение масштаба по осям координат одинаковое. Под коэффициентом изменения масштаба при переходе из одной системы в другую понимают отношение длин единичных элементов в «новой» и «исходной» систем координат:

$$m = \frac{e_{нов}}{e_{исх}}.$$

При переходе из «исходной» в «новую» систему координат необходимо выполнить преобразование

$$X'_A = X_A m;$$

$$Y'_A = Y_A m.$$

Вычисление координат точки пересечения двух прямых

Пусть заданы два отрезка прямых линии координатами своих концов: отрезок AB , где $A(X_A, Y_A)$ и $B(X_B, Y_B)$; отрезок CD , где $C(X_C, Y_C)$ и $D(X_D, Y_D)$. Необходимо вычислить координаты точки $F(X_F, Y_F)$ пересечения этих отрезков.

Уравнения прямых, на которых расположены заданные отрезки, имеют вид:

$$AB: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A};$$

$$CD: \frac{x - x_C}{x_D - x_C} = \frac{y - y_C}{y_D - y_C}.$$

Преобразовав эти уравнения, получаем

$$AB: y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A;$$

$$CD: y = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} x - \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} x_C.$$

Введем обозначения:

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}; \quad b_{AB} = -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A;$$

$$k_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}; \quad b_{CD} = -\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} x_C.$$

Тогда уравнения прямых будут иметь вид:

$$AB: y = k_{AB}x + b_{AB};$$

$$CD: y = k_{CD}x + b_{CD}.$$

Координаты искомой точки F пересечения прямых могут быть вычислены по формулам

$$x_F = \frac{b_{AB} - b_{CD}}{k_{CD} - k_{AB}}; \quad y_F = \frac{k_{CD}b_{AB} - k_{AB}b_{CD}}{k_{CD} - k_{AB}}.$$

1.5. Основные понятия теории погрешностей

1.5.1. Основные определения

Окружающий нас мир представляет собой совокупность материальных взаимосвязанных объектов. Областью деятельности геодезиста является измерение, т.е. процесс получения информации, адекватно отображающей свойства объектов материального мира.

Свойство объекта (предмета) – философская категория, характеризующая некоторую сторону объект (предмет), т.е. определяющая степень его общности или различия с другими объектами (предметами).

Любой материальный объект, как правило, характеризуется целой совокупностью свойств. В связи с этим возникает необходимость идентифицировать свойства, присвоив им наименования.

Именованное свойство объекта (предмета) называется *физической величиной (величиной)*.

Физическая величина – одно из свойств физического объекта (физической системы, явления или процесса), общего в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них.

Примером физической величины может служить длина какого – либо объекта, его ширина или высота, масса, возраст. Любое из этих свойств присуще целому ряду объектов. Этим свойством могут обладать очень многие объекты (предметы) материального мира. Но в количественном отношении, то есть в степени проявления этого свойства, каждый предмет индивидуален. Он (предмет) имеет свою, строго определенную на данный момент времени протяженность в пространстве, свою массу, свой возраст, т.е. он имеет свой индивидуальный размер физической величины.

Размер физической величины – количественная определенность физической величины, присущая конкретному объекту, системе, явлению или процессу.

Значение физической величины – выражение размера физической величины в виде некоторого числа принятых единиц измерения данной физической величины.

Истинное значение физической величины – значение физической величины, которое идеальным образом характеризует в качественном и количественном отношениях соответствующую физическую величину.

Примечание – Истинное значение физической величины может быть соотнесено с понятием абсолютной истины. Оно может быть получено только в результате бесконечного процесса измерений с бесконечным совершенствованием методов и средств измерений.

Действительное значение физической величины – Значение физической величины, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него.

Измерение физической величины – процесс, включающий совокупность операций с применением технических средств для получения количественного значения измеряемой величины.

Примечание – От термина «измерение» происходит термин «измерить», которым широко пользуются на практике. Все же нередко применяют такие термины, как «мерить», «обмерить», «замерить», «примерить», не вписывающиеся в систему метрологических терминов. Их применять не следует.

Любой процесс измерения происходит при наличии пяти *составляющих (факторов) измерения*:

1. Объект измерения - что измеряется;
2. Субъект измерения - кто измеряет;
3. Средство измерения - чем измеряется;
4. Метод измерения - как измеряется;
5. Внешняя среда - где измеряется и в каких .

Конкретное содержание и состояние в процессе измерения факторов измерения определяют *условия измерений*.

Два комплекса условий будем считать одинаковыми, если в обоих случаях:

1. объекты измерения были одного и того же рода и за время измерений их параметры изменялись в одних и тех же пределах;
2. субъекты измерения были одинаковой квалификации;
3. применялись средства измерения одного и того же класса точности;
4. измерения проводились по одной и той же методике;
5. внешняя среда, в которой проводились измерения, характеризовалась одними и теми же значениями показателей.

1.5.2. Классификация измерений

Измерения могут быть классифицированы по следующим признакам:

1. По физическому исполнению:

- прямые измерения, в которых значение измеряемой величины получают *непосредственным* сравнением с однородной физической величиной (эталоном). Примером прямых измерений служит измерение длины линии рулеткой, либо мерной лентой;

- косвенные, в которых значение определяемой величины получают из вычислений, в которых в качестве исходных используют результаты измерений величин, связанных с определяемой.. Примером может служить измерение линии светодальномером. В этом случае непосредственно измеряется время прохождения светового сигнала от дальномера до отражателя и обратно, а затем вычисляется длина линии как $S = \frac{1}{2}vt$, где v - скорость света.

2. По роду:

- однородные измерения, или измерения однородных физических величин. Примером может служить метод геометрического нивелирования, в котором измеряют отрезки от точек земной поверхности до горизонтального визирного луча прибора.

- разнородные, все прочие по отношению к однородным. Примером может служить определение превышения методом тригонометрического

нивелирования, в котором измеряют линии (горизонтальные проложения или наклонные дальности) и углы наклона.

3. По количеству:

- необходимые измерения доставляют только по одному значению каждой измеряемой величины;

- дополнительные или избыточные измерения производятся для получения нескольких значений измеряемой величины (измеряемых величин) в целях контроля, исключения грубых погрешностей или повышения качества результатов измерений.

4. По точности:

- равноточные измерения, выполняемые в одинаковых условиях, то есть объекты одного и того же рода измеряют исполнители одинаковой квалификации, приборами одного класса, по единой методике, в достаточно близких по характеру условиях внешней среды. В качестве примера равноточных измерений могут служить измерения угла несколькими приемами. Здесь результаты измерений каждым приемом равноточны, т.к. выполнены все выше указанные ограничения;

- неравноточными считают измерения, выполняемые в случаях, когда, по крайней мере, одна из составляющих процесса измерения значительно отличается от аналогичной составляющей других измерений.

В качестве примера неравноточных измерений могут служить измерения углов в триангуляциях разных классов.

1.5.3. Погрешности результата измерения

Рассмотрим пример. Ниже приведены результаты девятикратного измерения угла, выполненные при одинаковых условиях:

№№ п/п	Измеренное значение угла
1	72°13'38",3
2	44,6
3	33,7
4	41,1
5	43,0
6	36,2
7	39,9
8	37,8
9	40,3

Результаты измерений отражают свойство, присущее измеряемому углу, т.е. свойство, определенное ранее как *размер физической величины*. Это выражается в постоянстве измеренных значений градусов и минут. Но, в то же время, каждый из результатов измерения имеет свою индивидуальную особенность, связанную с погрешностью этого результата измерений, что выражено в изменчивости значений секунд и десятых долей секунд измеренного угла.

Рассмотренный выше пример указывает на то, что каждый результат измерения отражает объективно существующие свойства измеряемой величины и несет особенности процесса измерений, а также индивидуальные особенности каждого конкретного измерения. Эти индивидуальные особенности и отличают каждый результат повторного измерения от всех прочих, т.е. каждый результат измерения любой физической величины представляет собой сумму двух составляющих:

первая объективно отражает истинное значение измеряемой физической величины;

вторая - истинная погрешность конкретного результата измерения, несет в себе особенности данного конкретного измерения и, в общем случае, меняется от измерения к измерению.

Этот факт может быть представлен соотношением

$$\lambda_i = L + \varepsilon_i \quad (1.1)$$

где λ_i - результат i -ого измерения;

L - истинное значение измеряемой величины;

ε_i - истинная погрешность i -ого результата измерения.

В результате измерения получают значение λ_i , а истинное значение измеряемой величины L , также как и истинная погрешность результата измерения ε_i остаются неизвестными.

В теоретическом плане истинная погрешность ε_i есть разность между результатом измерения λ_i и истинным значением L измеренной физической величины, т.е. $\varepsilon_i = \lambda_i - L$.

Одной из основных задач теории измерений является изучение источников и характера погрешностей физических измерений. Возможны различные подходы к построению модели погрешности измерений. Рассмотрим, так называемую, аддитивную (суммарную) модель построения погрешности измерения. Суть ее заключается в том, что полная погрешность результата измерения представляет собой сумму, так называемых, **элементарных погрешностей**. При этом каждый из факторов, влияющих на результаты измерений, порождает свою группу элементарных погрешностей. Изучая элементарные погрешности отдельных факторов, мы приходим к выводу о неизбежности возникновения погрешности измерения.

1. Элементарные погрешности объекта измерений связаны с *неопределенностью* самого объекта измерений и его *изменчивостью* в процессе самого измерения. Как уже было сказано выше, объекты геодезических измерений ограничены **физическими** "точками", "прямыми", "плоскостями" и определить их "абсолютные" **геометрические** границы не представляется возможным. Неопределенность границ объекта измерения является одной из причин расхождений в результатах повторных измерений, ибо в каждом отдельном измерении исполнитель по иному оценивает границу объекта. Неопределенность границ объекта измерения связана не только с «геометрией» объекта. Так например, невозможно определить

"абсолютные" границы временного интервала. Аналогичные рассуждения вполне возможно провести относительно прочих, негеометрических свойств, подлежащих измерению.

Поскольку, "все течет, все изменяется", не остаются неизменными и объекты измерения. Эти изменения неизбежно отражаются в результатах повторных измерений.

2. Элементарные погрешности субъекта измерения в геодезической литературе известны как "личные" погрешности. Все они связаны с ограниченными возможностями органов чувств наблюдателя. Широко известно геодезистам понятие "критический угол зрения", т.е. минимальный угол, под которым две точки с расстояния наилучшего зрения (30-35 сантиметров) видны как не сливающиеся. Подобные "критические" пороги присущи всем другим органам чувств человека, что не может не оказывать влияние на процесс измерения и не сказываться на его результатах.

3. Погрешности средств измерений обусловлены погрешностями изготовления, установки и настройки мерного прибора и возникают в связи с:

а) несоблюдением необходимых для данного прибора геометрических условий, таких как перпендикулярность или параллельность осей и прочее;

б) наличием механических особенностей сочленения отдельных узлов прибора, таких как люфт, трение, деформации, вибрации и другое;

в) несовершенство оптики, наличие аберрации, ограниченная разрешающая способность и прочее;

г) несовершенства в работе электронных узлов приборов, таких как "задержки" сигналов в цепях, возникновение "шумов" и прочее.

Список источников приборных погрешностей может быть значительно расширен, в том числе и за счет упрощения модели прибора по отношению к тем математическим соотношениям, которые определяют данную схему измерений. Последнее замечание следует отнести и к целой серии аналоговых измерительных приборов старшего поколения.

4. Методические погрешности обычно связаны с ограничениями, накладываемыми на процесс измерения различными техническими инструкциями, определяющими процесс измерения. В любых инструкциях всегда задается некоторый предел возможных отклонения от теоретических положений, определяемых исходными математическими соотношениями.

5. Погрешности, порождаемые внешней средой, связаны с постоянным изменением внешней среды, как во времени, так и в пространстве, и ее влиянием на процесс измерения. Это, прежде всего, различного рода рефракции, влияющие на прохождение оптических лучей; "шумовые" помехи, накладывающиеся на электромагнитные сигналы измерительных приборов при их прохождении через ионосферу, стратосферу и атмосферу и прочее. Кроме того, внешняя среда оказывает определенное воздействие на технические средства измерения, тем самым меняет их характеристики и порождает новые приборные ошибки. Внешняя среда, воздействуя на исполнителя, также определенным образом меняет "личные" ошибки наблюдателя.

Такой подход к строению погрешности результата измерения является вполне оправданным с точки зрения практики измерений.

Заканчивая обзор элементарных погрешностей, необходимо отметить следующее: в практике часто бывает трудно строго ограничить класс элементарных погрешностей, с тем, чтобы однозначно можно было отнести конкретную элементарную погрешность к тому или иному классу. Это связано, во-первых, с тем, что факторы измерений взаимодействуют в процессе измерений друг с другом, а с другой стороны, любая классификация небезупречна, т.е. является научной абстракцией, призванной помочь вскрыть и изучить физические свойства изучаемого объекта.

1.5.4. Числовые характеристики точности измерений

Для характеристики точности измерений в геодезической практике обычно используют среднюю квадратическую погрешность (СКП)

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} \quad (1.2)$$

Рассмотрим рис. 1.9

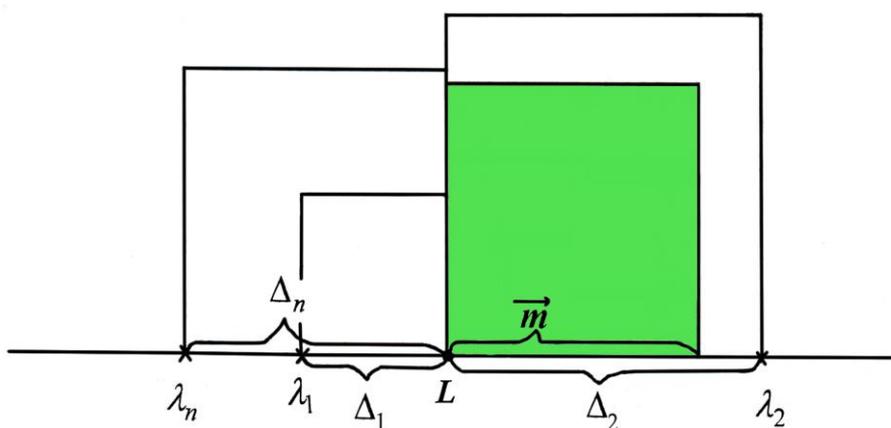


Рис.1.9. Схема образования средней квадратической погрешности

Здесь Δ_i – истинная погрешность i -ого результата измерений положения точки на оси координат.

На базе каждой погрешности строится квадрат, а затем определяется и строится средний по площади квадрат (он заштрихован). Сторона этого квадрата и есть СКП данного ряда измерений. Следовательно, СКП не есть погрешность какого-то конкретного измерения. СКП характеризует целый класс измерений, проводимых в одних и тех же условиях.

Зная СКП измерения, задают предельную погрешность, например, $\Delta_{пред.} = 3m$. Можно утверждать, что погрешность любого измерения,

проводимого в этих условиях, с определенной, весьма высокой, вероятностью не превзойдет величины предельной погрешности, т.е. практически всегда будет выполняться неравенство $|\Delta_i| \leq \Delta_{пред}$.

Если же выполняется неравенство противоположного смысла, т.е. $|\Delta_i| > \Delta_{пред}$ (истинная погрешность превышает предельную), можно делать вывод, что в измерениях имеет место грубая погрешность. В этом случае необходимо измерение провести заново.

В геодезической практике понятие «предельная погрешность» используется для получения, так называемых, допустимых погрешностей (допусков). Пример установления допусков приведен далее.

1.5.5. Оценка точности результатов измерений по истинным (действительным) погрешностям

Пусть имеется ряд результатов измерений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ одной физической величины, полученных в одинаковых условиях (равноточные измерения). Истинное (действительное) значение этой величины известно и равно L . По формуле (1.1) можно получить ряд $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ истинных (действительных) погрешностей результатов измерений. В этом случае в качестве характеристики точности может быть применена формула средней

квадратической погрешности $m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$,

где $[]$ - символ суммы, введенный Гауссом, означающий суммирование однородных элементов, отличающихся изменяющимися от 1 до n индексами. Символ Гаусса эквивалентен символу $\sum_{i=1}^n$, где n – количество суммируемых величин. Для приведенной формулы в соответствии с правилом раскрытия символа Гаусса имеем: $[\Delta^2] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2$.

1.5.6. Оценка точности функций результатов измерений

Пусть непосредственно измерены некоторые величины, точность измерения которых нам известна. Далее по измеренным величинам проводим вычисление новых величин. Возникает задача вычисления характеристик их точности.

Например, по измеренным стороне и двум углам треугольника необходимо вычислить две других стороны и оценить их точность, если известны характеристики точности измерения линии и углов этого треугольника.

Решение поставленной задачи выполняется на основании следующих теорем.

Теорема 1.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - ряд результатов измерений. Результаты измерений, получены в условиях, которые обеспечивают точность, характеризующуюся соответственно СКП m_1, m_2, \dots, m_n . По этим результатам измерений получена их линейная функция вида $y = C_0 + C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \dots + C_n\lambda_n$, где C_i ($i=0, n$) – постоянные. Тогда СКП этой функции может быть вычислена по формуле

$$m_y = \sqrt{C_1^2 m_1^2 + C_2^2 m_2^2 + \dots + C_n^2 m_n^2} \quad (1.3)$$

Теорема 2.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - ряд результатов измерений, полученный в таких условиях, которые обеспечивают точность, характеризующуюся соответственно СКП m_1, m_2, \dots, m_n . По этим результатам измерений получена дифференцируемая функция вида $y = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Тогда СКП этой функции может быть вычислена по формуле

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_1}\right)^2 m_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_n}\right)^2 m_n^2} \quad (1.4)$$

1.5.7. Веса результатов измерений

Вес является характеристикой относительной точности результата измерения и рассчитывается как величина, обратно пропорциональная квадрату средней квадратической погрешности результата измерения

Пусть имеем ряд измерений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, каждое из которых характеризуется соответственно СКП m_1, m_2, \dots, m_n . Тогда вес i - ого результата измерения может быть рассчитан по формуле:

$$P_i = \frac{k}{m_i^2}, \quad (1.5)$$

где k – некоторая постоянная.

Так как вес - характеристика относительной точности, то понятие веса не применимо к одному, отдельно взятому, измерению. Можно приписать любой вес результату единичного измерения, но этот факт еще не о чем не говорит. Вес показывает, во сколько раз разброс измерений одной величины больше или меньше разброса другй. Необходимо помнить, что под разбросом одного измерения следует понимать разброс для серии измерений, выполняемых в одинаковых условиях. Тогда, чем больше вес одного результата измерения, тем точнее это измерение по сравнению с другими.

Выбирая различные значения k в формуле (1.5) тем самым увеличиваем (уменьшаем) в одно и тоже число раз веса всех результатов измерений

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, при этом *соотношение весов отдельных результатов измерений остается неизменным.*

Можно вывести следующие соотношения:

$$p_i = \frac{k}{m_i^2} \Rightarrow k = p_i \cdot m_i^2 \quad p_j = \frac{k}{m_j^2} \Rightarrow k = p_j \cdot m_j^2$$

Из последних равенств следует, что

$$p_i \cdot m_i^2 = p_j \cdot m_j^2$$

Это позволяет произвести расчет любой неизвестной четвертой величины, например:

$$p_i = p_j \cdot \frac{m_j^2}{m_i^2}; m_i = m_j \sqrt{\frac{p_j}{p_i}}. \quad (1.5)$$

Выберем k так, чтобы вес одного из измерений $p_j = 1$. Тогда получаем $k = 1 \cdot \sigma_j^2 = \sigma_j^2$

СКП величины, обладающей единичным весом, обычно обозначают μ . Тогда $k = m_j^2 = \mu^2$, и верно соотношение:

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}. \quad (1.6)$$

В геодезической практике величину μ называют «СКП единицы веса», понимая под этим «средняя квадратическая погрешность величины, вес которой равен единице».

1.5.8. Вычисление весов функций результатов измерений

Иногда в практике геодезических работ возникает необходимость рассчитать вес функции результатов измерений. Решение поставленной задачи может быть проведено на основании следующих двух теорем.

Теорема 3.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - результаты независимых измерений полученные с весами, соответственно равными p_1, p_2, \dots, p_n . Тогда линейная функция этих результатов измерений $y = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 + \dots + C_n \lambda_n$, где все C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) - теоретические постоянные, имеет обратный вес, вычисляемый по формуле

$$\frac{1}{P_y} = \frac{C_1^2}{P_1} + \frac{C_2^2}{P_2} + \dots + \frac{C_n^2}{P_n}. \quad (1.7)$$

Теорема 4.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - результаты независимых измерений получены с весами, соответственно равными p_1, p_2, \dots, p_n . Тогда дифференцируемая функция $y = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ имеет обратный вес, вычисляемый по формуле

$$\frac{1}{p_y} = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{p_1} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{p_n}. \quad (1.8)$$

1.5.9. Математическая обработка результатов измерений одной величины

Пусть имеется ряд $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ измерений одной и той же физической величины L , истинное значение которой неизвестно. Все измерения производились в различных условиях, и результаты измерений соответственно характеризуются весами p_1, p_2, \dots, p_n . На основании этих данных необходимо решить две задачи:

1. Задача уравнивания. Уравнивание есть процесс нахождения значения измеряемой величины наилучшего в смысле его, близости к истинному значению.

В качестве наилучшего приближения принимается величина, называемая общей арифметической серединой или средней взвешенной, вычисляемой по формуле

$$\bar{\lambda} = \frac{[p\lambda]}{[p]} = \frac{p_1\lambda_1}{[p]} + \frac{p_2\lambda_2}{[p]} + \dots + \frac{p_n\lambda_n}{[p]}. \quad (1.9)$$

Здесь следует обратить внимание на то факт, что каждое измерение вносит в формирование уравниваемого значения долю, пропорциональную его весу, т. е., чем точнее результат измерения, тем больше вес, с которым это измерение входит в окончательный результат.

2. Задача апостериорной оценки точности. Апостериорная (*a`posteriori* – с латинского *после опыта*) оценка точности – это оценка точности по результатам измерений. В случае математической обработки ряда измерений одной физической величины апостериорная оценка точности предполагает вычисление характеристик точности результатов измерений и характеристику точности уравниваемого значения измеряемой величины.

Прежде всего, необходимо вычислить СКП единичного веса. Эта задача решается с помощью формулы

$$\mu = \sqrt{\frac{[pV^2]}{n-1}}, \quad (1.10)$$

где $V_i = \bar{\lambda} - \lambda_i$ – поправка из уравнивания.

Далее вычисляют вес общей арифметической середины

$$p_{\bar{\lambda}} = [p]$$

Вес общей арифметической середины (среднего взвешенного) равен сумме весов отдельных результатов измерений.

Тогда СКП общей арифметической середины может быть найдена из соотношения

$$m_{\bar{\lambda}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$$

Рассмотрим частный случай, когда все измерения выполнены равноточно. В этом случае возможно воспользоваться результатами предыдущих рассуждений, приняв данный ряд как частный случай предыдущего при условии, что все веса измерений одинаковые. Им всем можно придать любые, но одинаковые, значение. Наиболее целесообразно придать всем весам ряда измерений значение, равное единице. Тогда в качестве наилучшего приближения будем, как и ранее, рассматривать величину

$$\bar{\lambda} = \frac{[p\lambda]}{[p]}$$

При условии, что все $p_i = 1$, $[p\lambda] = [\lambda]$, а $[p] = n$. И окончательно

$$\bar{\lambda} = \frac{[\lambda]}{n}$$

то есть *среднее арифметическое (простая арифметическая середина)* является наилучшим приближением к истинному значению многократно равноточно измеренной величины..

В этом случае СКП единичного веса будет характеризовать точность любого измерения, т.к. $p_{\lambda} = 1$. Вычисление СКП единичного веса проводим по формуле

$$\mu = m_{\lambda} = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}}$$

Вес среднего арифметического вычисляется по формуле

$$p_{\bar{\lambda}} = [p] = n,$$

вес среднего арифметического равен числу осредняемых результатов измерений.

Тогда СКП среднего арифметического будет можно вычислить по формуле

$$m_{\bar{\lambda}} = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$$

1.5.10. Практическое применение приемов теории погрешностей для решения задач межевания.

Решение задач

Задача 1

Линия теодолитного хода измерена мерной лентой пять раз. При этом получены результаты: 217,24; 217,31; 217,28; 217,23; 217,20 м. Эта же линия измерена светодальномером, что дало результат 217,236 м. Найти среднюю квадратическую погрешность измерения линии мерной лентой, если результат измерения линии светодальномером принят за действительный.

Решение.

Все расчеты сведены в таблицу

№	λ , м	Δ см	Δ^2
1	217,24	+ 0,4	0,16
2	217,31	+ 7,4	54,76
3	217,28	+ 4,4	19,36
4	217,23	-0,6	0,36
5	217,20	- 3,6	12,96
[]			87,6

Средняя квадратическая погрешность будет равна

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{87,6}{5}} = 4,2 \text{ см.}$$

Предельная погрешность равна

$$\Delta_{пред} = 3m = 12,6 \text{ см.}$$

Погрешности всех пяти измерений меньше предельной погрешности, следовательно, нет оснований предполагать, что измерения имеют грубые погрешности

Задача 2

Пусть проложен теодолитный ход. Углы хода $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ измерялись в одинаковых условиях со средними квадратическими погрешностями $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_\beta$. Найти среднюю квадратическую погрешность дирекционного угла последней линии о хода $m_{\alpha_{CD}}$. При этом следует принять, что значение исходного дирекционного угла α_{AB} линии AB получено в условиях, обеспечивающих его определение с погрешностями, пренебрегаемо малыми по сравнению с погрешностями измерений, т.е. практически можно считать α_{AB} величиной безошибочной.

Решение

Для определения погрешности дирекционного угла линии CD , прежде всего, необходимо представить этот дирекционный угол как функцию исходных и измеренных величин. Так как были измерены правые по ходу углы, искомый дирекционный угол может быть представлен в виде $\alpha_{CD} = \alpha_{AB} + 180^\circ \cdot n - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_n$.

Учитывая, что α_{AB} - величина безошибочная, как и $180^\circ \cdot n$, можно записать: $\alpha_{CD} = C_0 - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_n$.

Здесь все коэффициенты перед результатами измерений (C_i) равны -1 .

На основании теоремы 1 для средней квадратической погрешности дирекционного угла последней линии хода можно записать

$$m_{\alpha_{CD}}^2 = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2} \text{ или } m_{\alpha_{CD}} = m_\beta \sqrt{n}.$$

Окончательно можно сделать вывод, что при *передаче дирекционных углов случайные погрешности накапливаются пропорционально корню квадратному из числа измеряемых углов.*

Задача 3.

Вычислить приращения координат и их СКП по линии длиной 250,17 м, имеющей дирекционный угол $63^\circ 27'$, если $m_s = 0,08 \text{ м}$ и $m_\alpha = 2'$.

Решение.

Известно, что приращения координат рассчитывают по формулам $\Delta X = S \cos \alpha$ и $\Delta Y = S \sin \alpha$, что для данного случая дает результаты $\Delta X = 111,83 м$ и $\Delta Y = 223,79 м$. СКП приращений координат могут быть получены из соотношений

$$m_{\Delta X} = \sqrt{\left(\frac{\partial(\Delta X)}{\partial S} m_s\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Delta X)}{\partial \alpha} m_\alpha\right)^2};$$

$$m_{\Delta Y} = \sqrt{\left(\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial S} m_s\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial \alpha} m_\alpha\right)^2},$$

где $\frac{\partial(\Delta X)}{\partial S}$; $\frac{\partial(\Delta X)}{\partial \alpha}$; $\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial S}$; $\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial \alpha}$ - частные производные ΔX и ΔY соответственно по аргументам S и α .

Но

$$\frac{\partial(\Delta X)}{\partial S} = \cos \alpha; \quad \frac{\partial(\Delta X)}{\partial \alpha} = -S \sin \alpha = -\Delta Y;$$

$$\frac{\partial(\Delta Y)}{\partial S} = \sin \alpha; \quad \frac{\partial(\Delta Y)}{\partial \alpha} = S \cos \alpha = \Delta X.$$

Тогда

$$m_{\Delta X} = \sqrt{(m_s \cos \alpha)^2 + (-\Delta Y \cdot m_\alpha)^2};$$

$$m_{\Delta Y} = \sqrt{(m_s \sin \alpha)^2 + (\Delta X \cdot m_\alpha)^2}.$$

При вычислениях величина m_α должна быть представлена в радианной мере, но в условии задачи она задается в градусной мере. С учетом этого предыдущие формулы примут вид

$$m_{\Delta X} = \sqrt{(m_s \cos \alpha)^2 + \left(-\Delta Y \cdot \frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2};$$

$$m_{\Delta Y} = \sqrt{(m_s \sin \alpha)^2 + \left(\Delta X \cdot \frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2}.$$

Подставив соответствующие значения величин, получаем

$$m_{\Delta X} = \sqrt{(0,08 \cdot 0,454)^2 + \left(\frac{2 \cdot 224}{3440}\right)^2} = 0,14 м;$$

$$m_{\Delta Y} = \sqrt{(0,08 \cdot 0,891)^2 + \left(\frac{2 \cdot 112}{3440}\right)^2} = 0,08 м.$$

Окончательно

$$\Delta X = 111,83 м; \quad m_{\Delta X} = 0,14 м;$$

$$\Delta Y = 223,79 м; \quad m_{\Delta Y} = 0,08 м.$$

Задача 4

Для получения расстояния между точками на плане были определены координаты концов отрезка, что дало результаты x_1 и y_1 , x_2 и y_2 . Эти величины получены со средними

квадратическими погрешностями m_{x_1} и m_{y_1} , m_{x_2} и m_{y_2} . Необходимо вычислить расстояние между этими точками и его среднюю квадратическую погрешность.

Решение

Расстояние между точками определяют по формуле:

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Величина S является нелинейной функцией координат, и для решения поставленной задачи необходимо вычислить частные производные S по всем координатам. Они имеют вид:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = -\frac{x_2 - x_1}{S}; \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = \frac{x_2 - x_1}{S}; \quad \frac{\partial S}{\partial y_1} = -\frac{y_2 - y_1}{S}; \quad \frac{\partial S}{\partial y_2} = \frac{y_2 - y_1}{S}.$$

Тогда СКП расстояния определяется формулой

$$m_S = \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{S}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{x_2 - x_1}{S}\right)^2 m_{x_2}^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{S}\right)^2 m_{y_1}^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{S}\right)^2 m_{y_2}^2}$$

При условии, что $m_{x_1} = m_{x_2} = m_{y_1} = m_{y_2} = m$, будем иметь:

$$m_S = m \sqrt{\frac{2(x_2 - x_1)^2 + 2(y_2 - y_1)^2}{S^2}} = m \sqrt{\frac{2S^2}{S^2}} = m\sqrt{2}, \text{ или } m_S = m\sqrt{2}$$

Введем понятие **СКП положения точки** $m_t = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$. При условии равенства СКП определения координат точек $m_x = m_y = m$ СКП положения точки вычисляется по формуле $m_t = m\sqrt{2}$.

Таким образом, получаем $m_S = m_t$, т.е. **СКП определения расстояния по плану равно СКП положения точки на плане.**

Задача 5

Для получения дирекционного угла направления между точками на плане были определены координаты концов отрезка, что дало результаты x_1 и y_1 , x_2 и y_2 . Эти величины получены со средними квадратическими погрешностями m_{x_1} и m_{y_1} , m_{x_2} и m_{y_2} . Необходимо вычислить дирекционный угол направления и его среднюю квадратическую погрешность.

Решение

Дирекционный угол направления вычисляют по формуле

$$\alpha = \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Величина α является нелинейной функцией координат, и для решения поставленной задачи необходимо вычислить частные производные α по всем координатам. Окончательно они имеют вид:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = \frac{\sin \alpha}{S}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = -\frac{\sin \alpha}{S}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} = -\frac{\cos \alpha}{S}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} = \frac{\cos \alpha}{S}.$$

Тогда СКП дирекционного угла определяется формулой

$$m_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{S}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{S}\right)^2 m_{x_2}^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{S}\right)^2 m_{y_1}^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{S}\right)^2 m_{y_2}^2}$$

При условии, что $m_{x_1} = m_{x_2} = m_{y_1} = m_{y_2} = m$, будем иметь:

$$m_\alpha = m \sqrt{\frac{2\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha}{S^2}} = \frac{m}{S} \sqrt{2}.$$

Если, с учетом предыдущей задачи считать, что СКП положения $m_t = m\sqrt{2}$, то СКП дирекционного угла определяется соотношением $m_\alpha = \frac{m_t}{S}$, выраженное в радианной мере.

Задача 6

Для вычисления угла β_2 определены координаты трех точек x_1 и y_1 , x_2 и y_2 , x_3 и y_3 . Эти величины получены со средними квадратическими погрешностями $m_{x1} = m_{y1} = m_{x2} = m_{y2} = m_{x3} = m_{y3} = m$.

Необходимо вычислить угол β_2 , вершина которого лежит в точке 2, и его СКП.

Решение

Угол β_2 вычисляют по формуле

$$\alpha = \arctg \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \arctg \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Угол β_2 является нелинейной функцией координат, и для решения поставленной задачи необходимо вычислить частные производные β_2 по всем координатам. Окончательно они имеют вид:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = \frac{\sin \alpha_{21}}{S_{21}}; \quad \frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{\sin \alpha_{23}}{S_{23}} - \frac{\sin \alpha_{21}}{S_{21}}; \quad \frac{\partial s}{\partial x_3} = -\frac{\sin \alpha_{23}}{S_{23}};$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y_1} = -\frac{\cos \alpha_{21}}{S_{21}}; \quad \frac{\partial s}{\partial y_2} = -\frac{\cos \alpha_{23}}{S_{23}} + \frac{\sin \alpha_{21}}{S_{21}}; \quad \frac{\partial s}{\partial y_3} = \frac{\cos \alpha_{23}}{S_{23}};$$

Тогда СКП угла β_2 определяется формулой

$$m_\beta = \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha_{21}}{S_{21}}\right)^2 m_{x1}^2 + \left(\frac{\sin \alpha_{23}}{S_{23}} - \frac{\sin \alpha_{21}}{S_{21}}\right)^2 m_{x2}^2 + \left(\frac{\sin \alpha_{23}}{S_{23}}\right)^2 m_{x3}^2 + \left(\frac{\cos \alpha_{21}}{S_{21}}\right)^2 m_{y1}^2 + \left(\frac{\cos \alpha_{23}}{S_{23}} - \frac{\cos \alpha_{21}}{S_{21}}\right)^2 m_{y2}^2 + \left(\frac{\cos \alpha_{23}}{S_{23}}\right)^2 m_{y3}^2}$$

После преобразований получаем

$$m_\beta = m \frac{S_{13}}{S_{23} S_{21}}.$$

Задача 7

Пусть имеется земельный участок, координаты вершин которого определены с погрешностью положения m_t . Вычислить СКП площади этого участка.

Решение

Для вычисления площади применяют формулу

$$P = 0,5 \sum_{i=1}^n X_i (Y_{i+1} - Y_{i-1}) = 0,5 \sum_{i=1}^n Y_i (X_{i-1} - X_{i+1}),$$

где X_i и Y_i - прямоугольные координаты i -ого межевого знака.

В этом случае СКП площади земельного участка может быть получена по формуле

$$m_p = 0,5m_t \sqrt{\sum_1^n d_{i-1;i+1}^2} / 2,$$

где m_t – СКП положения межевого знака;

$d_{i-1;i+1}$ – диагональ, соединяющие две соседние для каждого i – ого межевого знака.

Задача 8 В треугольнике измерены основание a и высота h с погрешностями, соответственно равными m_a и m_h . Вычислить СКП площади участка.

Решение

Площадь определяют из соотношения $P = 0,5ah$. В соответствии с правилами теории погрешностей СКП площади может быть определено по формуле

$$m_p = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial a} m_a\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial h} m_h\right)^2}.$$

Вычислив частные производные, окончательно получаем

$$m_p = \sqrt{(0,5h \cdot m_a)^2 + (0,5am_h)^2} = 0,5\sqrt{(hm_a)^2 + (am_h)^2}$$

Задача 9 В треугольнике измерены две стороны a и b угол β между ними со средними квадратическими погрешностями, соответственно равными m_a , m_b и m_β . Вычислить СКП площади.

Решение Площадь определяют из соотношения $P = 0,5ab \sin \beta$. В соответствии с правилами теории погрешностей СКП площади может быть определено по формуле

$$m_p = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial a} m_a\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial b} m_b\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial \beta} m_\beta\right)^2}.$$

Вычислив частные производные и представив СКП угла в радианной мере, окончательно получаем

$$m_p = 0,5\sqrt{(b \sin \beta \cdot m_a)^2 + (a \sin \beta \cdot m_b)^2 + \left(abc \cos \beta \frac{m_\beta}{\rho}\right)^2}.$$

Задача 10 В четырехугольнике измерены все стороны a, b, c и d и углы β_1 и β_2 , (Рис. 3.5.), с СКП соответственно равными $m_a, m_b, m_c, m_d, m_{\beta_1}$ и m_{β_2} . Найти площадь четырехугольника и СКП площади.

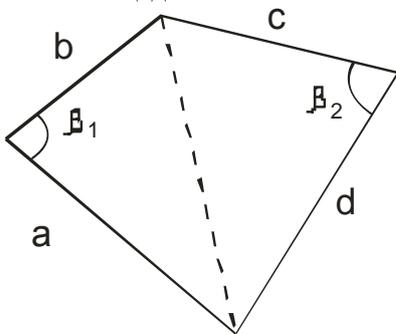


Рис. 1.10. Определение площади четырехугольника

Решение Площадь четырехугольника по данным измерений можно вычислить по формуле:

$$P = 0,5(ab \sin \beta_1 + cd \sin \beta_2)$$

Тогда, в соответствии с правилами теории СКП площади четырехугольника определится из соотношения

$$m_P = 0,5 \sqrt{(b \sin \beta_1 m_a)^2 + (a \sin \beta_1 m_b)^2 + (d \sin \beta_2 m_c)^2 + (c \sin \beta_2 m_d)^2 + \left(abc \cos \beta_1 \frac{m_\beta}{\rho}\right)^2 + \left(cd \cos \beta_2 \frac{m_\beta}{\rho}\right)^2}$$

Если четырехугольник по форме близок к квадрату, то есть $a \approx b \approx c \approx d = S$ и $\beta_1 \approx \beta_2 \approx 90^\circ$, то его площадь будет примерно равна $P \approx S^2$. Если, кроме того, $m_a = m_b = m_c = m_d = m_S$ и углы измерены равноточно, то представленная выше формула примет вид

$$m_P = m_S \sqrt{P}$$

Задача 11 Определить площадь прямоугольника и ее СКП, если стороны равны a и b и их СКП $m_a = m_b = m_S$.

Решение

Площадь прямоугольника определяется соотношением $P = ab$.

В соответствии с правилами теории погрешностей СПК площади может быть представлена соотношением

$$m_P = \sqrt{b^2 m_S^2 + a^2 m_S^2} = m_S \sqrt{P} \sqrt{\frac{1+K^2}{K}},$$

где $K = \frac{a}{b}$.

При $K = 1$, т.е. при $a = b$ формула принимает вид $m_P = m_S \sqrt{P}$, что полностью соответствует решению предыдущей задачи.

Последние формулы широко применяются при выполнении предварительных расчетов точности площади земельного участка по прямоугольным координатам.

Задача 12

Измерены два угла с СКП, соответственно равными $m_1 = 30''$ и $m_2 = 1''$. Вычислить веса этих результатов измерений.

Решение

Примем для расчета весов $k = 400$. Тогда веса заданных величин будут

$$p_1 = \frac{400}{900} = \frac{4}{9}; p_2 = \frac{400}{1} = 400,$$

а в качестве величины, обладающей единичным весом, выступает угол, точность измерения которого характеризуется СКП равным $20''$, что вытекает из следующих соображений:

$$k = \mu^2 \Rightarrow \mu = \sqrt{k} = 20''.$$

Задача 13

Вычислить вес дирекционного угла n -ой линии хода при условии равноточности измерения углов хода.

Решение

Дирекционный угол последней линии теодолитного хода вычисляем по известной формуле

$$\alpha_n = \alpha_{AB} + 180^\circ \cdot n - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_n$$

Условие равноточности измерения углов хода позволяет приписать всем измеренным значениям углов один и тот же вес, в частности, равный единице, т.е.

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = p_\beta = 1$$

Тогда на основании Теоремы 3 записываем выражение обратного веса дирекционного угла последней линии хода. Необходимо учесть, что слагаемое $\alpha_{AB} + 180^\circ \cdot n$ в предыдущей формуле есть безошибочная величина с нулевой дисперсией, и, следовательно, с нулевым обратным весом. На основании этого имеем

$$\frac{1}{p_{\alpha_n}} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^2}{1} + \dots + \frac{(-1)^2}{1} = n$$

Тогда $p_{\alpha_n} = \frac{1}{n}$ при $p_\beta = 1$.

Задача 14

С плана графически взяты прямоугольные координаты x_1, y_1 начала и x_2, y_2 конца некоторого отрезка, после чего была вычислена его длина S . Принимая, что все четыре координаты были получены равноточно, вычислить вес длины этого отрезка. Сравнить полученное значение веса с весом значения непосредственного измерения линии по карте, если такое измерение выполняется с той же точностью, что и измерение любой из координат конца отрезка.

Решение.

Длина отрезка определяется соотношением

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Учитывая что все четыре координаты получены равноточно, им можно приписать одинаковый вес, т.е. записать, что $p_{x_1} = p_{x_2} = p_{y_1} = p_{y_2} = 1$.

Величина S является нелинейной функцией координат, и для решения поставленной задачи необходимо вычислить частные производные S по всем координатам. Они имеют вид:

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = -\frac{x_2 - x_1}{s}; \quad \frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{x_2 - x_1}{s}; \quad \frac{\partial s}{\partial y_1} = -\frac{y_2 - y_1}{s}; \quad \frac{\partial s}{\partial y_2} = \frac{y_2 - y_1}{s}.$$

Подставляя значения частных производных в формулу обратного веса, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_s} &= \frac{(x_2 - x_1)^2}{s^2} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{s^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{s^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{s^2} = \\ &= 2 \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{s^2} = 2. \end{aligned}$$

Следовательно

$$p_s = \frac{1}{2}.$$

Если принять, что измерение отрезка по карте выполняется с той же точностью, что и измерение любой координаты, то приходим к выводу, что получение длины S непосредственно с плана будет иметь вес равный единице, т. е. в два раза больший, чем ее косвенное вычисление через измеренные координаты.

Задача 15 Вычисление погрешности положения точки, координаты которой получены проложением теодолитного хода.

Несколько упростим задачу. Будем считать, что проложен вытянутый теодолитный ход, т.е. все углы хода равны 180° . ход имеет равные стороны, т.е. $S_1 = S_2 = \dots = S_n = 200,00$ м; ход

ориентирован вдоль оси OY , т. е. $\alpha_{1-2} = 90^\circ$; при работе использован электронный тахеометр, обеспечивающий получение углов и сторон хода соответственно с СКП, равными $m_\beta = 5''$ и $m_S = 5$ мм.

Решение.

Решая задачу 3 о вычислении СКП приращения координат, мы получили следующие формулы:

$$m_{\Delta X} = \sqrt{(m_S \cos \alpha)^2 + (-\Delta Y \cdot m_\alpha)^2};$$

$$m_{\Delta Y} = \sqrt{(m_S \sin \alpha)^2 + (\Delta X \cdot m_\alpha)^2}.$$

При тех условиях, которые мы оговорили для теодолитного хода, будем иметь:

$$\alpha = 90^\circ; \cos \alpha = 0; \sin \alpha = 1; \Delta X = 0; \Delta Y = S.$$

Тогда представленные формулы примут вид

$$m_{\Delta X} = S \frac{m_\alpha}{\rho}; \quad m_{\Delta Y} = m_S.$$

С такими СКП получают приращения координат. Координаты конечной точки хода получают по следующим формулам:

$$X_{кон} = X_{нач} + \Delta X_1 + \dots + \Delta X_n;$$

$$Y_{кон} = Y_{нач} + \Delta Y_1 + \dots + \Delta Y_n.$$

Применяя к последним формулам теорему 1 и учитывая, что все приращения получены с одинаковыми погрешностями, получаем следующие соотношения для СКП последней точки хода:

$$m_{X_{ккк}} = \sqrt{m_{X_{нач}}^2 + \left(S \frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2 n};$$

$$m_{Y_{ккк}} = \sqrt{m_{Y_{нач}}^2 + m_S^2 n}.$$

При решении некоторых задач можно пренебречь погрешностями исходных данных. Тогда последние формулы примут вид:

$$m_{X_{ккк}} = S \frac{m_\alpha}{\rho} \sqrt{n};$$

$$m_{Y_{ккк}} = m_S \sqrt{n}.$$

Под погрешностью положения точки будем понимать величину

$$m_t = \sqrt{m_X^2 + m_Y^2}.$$

Погрешность положения последней точки вытянутого хода (без учета погрешностей исходных данных) будет вычисляться по формуле

$$m_t = \sqrt{\left[\left(S \frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2 + m_S^2\right] n}$$

В табл. сведем погрешности положения последней точки хода при различном числе поворотных точек.

№№	Число углов n	Таблица		
		m_X , см	m_Y , см	m_t , см
1	10	1,5	1,5	2,0
2	16	1,9	2,0	2,8

3	25	2,4	2,5	3,5
4	50	3,4	3,5	4,9

Как видно из приведенной таблицы, современные средства измерения позволяют получать координаты точек теодолитного хода с достаточно высокой точностью

Здесь следует отметить, что погрешность положения последней точки вытянутого хода не зависит от направления хода.

Задача 16

При ограничениях предыдущей задачи определить СКП положения точки теодолитного хода, опирающегося на две различные опорные точки, считая, что опорные точки имеют СКП положения $m_{t_{oj}} = 5,0$ см

(Рис.2)

Решение

Можно считать, что координаты определяемой точки получены дважды: с одного и второго ходов, каждый из которых имеет соответственно n_1 и n_2 поворотных точек. Вес координат искомой точки будет обратно пропорционален числу поворотных точек соответствующего хода, т.

е. $p_1 = \frac{1}{n_1}$ и $p_2 = \frac{1}{n_2}$.

В этом случае в качестве окончательного значения координат искомой точки выбираем общую арифметическую середину и получаем

$$\bar{X}_{кон} = \frac{X_1 n_2 + X_2 n_1}{n_1 + n_2};$$

$$\bar{Y}_{кон} = \frac{Y_1 n_2 + Y_2 n_1}{n_1 + n_2}.$$

Тогда СКП положения с учетом уравнинных координат и погрешностей опорных точек определяется соотношением

$$m_t = \sqrt{\left(\left(S \frac{m_\alpha}{\rho} \right)^2 + m_S^2 + m_{исх}^2 \right) \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}.$$

Если число точек в ходах одинаковое, то последняя формула примет вид

$$m_t = \sqrt{\left(\left(S \frac{m_\alpha}{\rho} \right)^2 + m_S^2 + m_{исх}^2 \right) \frac{n}{2}},$$

т.е. при проложении замкнутого хода СКП положения средней точки уменьшается в корень из двух.

Приведенные расчеты соответствуют требованиям, записанным в «Инструкции по межеванию земель».

Задача 17

Определить допустимое расхождение между координатами одной и той же точки, полученной из различных определений.

Примечание.

Сформулированная задача имеет вполне конкретный практический смысл. Предположим, что было проведено межевание земельного участка, в результате которого определены координаты межевых знаков. Затем проводилось межевание соседнего участка, в который в качестве граничных точек вошли несколько точек ранее учтенного земельного участка. Координаты этих точек получены из новых измерений. Необходимо определить, допустимы ли расхождения вновь полученных координат со старыми.

Решение.

Вполне возможно, что в момент получения материалов нового межевания под руками не оказалось старого дела. В наличии имеются только старые координаты. Тогда предлагается такое решение:

В соответствии с «Инструкцией по межеванию земель» СКП положения межевого знака определено и равно m_t . С такой же СКП проведено повторное определение положения межевого знака. Тогда несовпадение положения одной и той же точки, вычисляемое по формуле

$$\Delta S = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$$

не должно превышать предельной погрешности разности положений, вычисляемой по формуле

$$\Delta_t^{пред} = 2\sqrt{m_t^2 + m_t^2} = 2m_t\sqrt{2},$$

Исходя из этого соотношения, для различных категорий земель получаем следующие допуски, представленные в табл.1.2.

Следует рекомендовать специалистам, принимающим к исполнению межевое дело следующее:

1. В практике весьма часто при приемке межевого дела предлагают при наличии допустимых расхождений между «старыми» и «новыми» координатами одних и тех же точек в качестве окончательных брать «старые» координаты. Такой вариант недопустим. Под «старые» координаты приходится перевычислять и все вновь закрепленные точки, что нарушает геометрию последних измерений. и фактически выбрасываются выполненные «новые» измерения.

2. Предлагается оставлять в базе данных как «старые» так и «новые» координаты до того момента, пока межевание в пределах кадастрового квартала не будет выполнено полностью. Тогда можно провести осреднение координат точек, имеющих несколько значений, отличающихся друг от друга в пределах допусков.

Таблица 1.2

Нормативная точность определения координат характерных точек границ земельных участков

№№ п.п.	Виды правового режима земельных участков	Средняя квадратическая погрешность M_t в метрах ¹	
		Более пяти лет ²	От года до пяти лет ³
1	Земли поселений (города):		
	- земельные участки граждан, предназначенные для ведения личного подсобного, дачного хозяйства, огородничества, садоводства, индивидуального гаражного или индивидуального жилищного строительства	0.50	1.00
	- земельные участки, предназначенные для сельскохозяйственного использования и рекреации	1.00	1.00
	- земельные участки (земли), находящиеся в государственной или муниципальной собственности, и никому не		

	предоставленные - для иных целей	1.00 0.10	1.00 1.00
2	Земли поселений (поселки, сельские населенные пункты): - земельные участки граждан, предназначенные для ведения личного подсобного, дачного хозяйства, огородничества, садоводства, индивидуального гаражного или индивидуального жилищного строительства - земельные участки, предназначенные для сельскохозяйственного использования и рекреации - земельные участки (земли), находящиеся в государственной или муниципальной собственности, и никому не предоставленные - для иных целей	0.50 1.00 1.00 0.20	1.00 1.00 1.00 1.00
3	Земли, предоставленные за чертой поселений для ведения личного подсобного, дачного хозяйства, огородничества, садоводства, индивидуального гаражного или индивидуального жилищного строительства	0.50	2.50
4	Земли промышленности и иного специального назначения	0.50	2.50
5	Земли сельскохозяйственного назначения (за исключением земель, указанных в пункте 3)	2.50	12.50
6	Земли особо охраняемых природных территорий, земли лесного фонда, земли водного фонда и земли запаса	5.00	12.50

1 Средняя квадратическая погрешность M_t положения характерных точек границ земельных участков относительно ближайшего пункта исходной геодезической основы не более, (м).

² Земельные участки, находящиеся или предоставляемые на праве собственности, постоянного (бессрочного) пользования, пожизненного наследуемого владения, аренды на срок более чем пять лет.

³ Земельные участки, находящиеся или предоставляемые на праве безвозмездного срочного пользования или аренды на срок от года до пяти лет.

1.6. Простейшие геодезические построения на местности

Для описания земельного участка достаточно в выбранной системе координат определить координаты углов поворота сторон заданного земельного участка. Если эта система координат распространена на всю территорию государства, то положение любого участка определяется вполне однозначно. Все это легко и просто сделать на листе бумаги, где вычерчены две взаимно перпендикулярные прямые, т.е. *задана система координат*.

Но в практической жизни возникает масса вопросов. Прежде всего, а как задать систему прямоугольных координат на земной поверхности? Предположим, что эта задача решена, и мы зафиксировали на поверхности Земли две взаимно перпендикулярные прямые. Тогда возникает второй вопрос: а как непосредственно на местности определить отрезки $X_A; Y_A$ для заданной точки A ? При этом необходимо учесть, что территория, на которой мы проживаем, существенно больше листа бумаги с нарисованной системой прямоугольных координат. Возникает, так называемая, задача *координатизации пространства*, т.е. построения системы точек, тем или иным методом определенных в заданной системе координат. Тогда возникает возможность передачи координат с известных точек на вновь определяемые. Рассмотрим некоторые варианты таких построений

1.6.1. Полярный метод

Сущность полярного метода заключается в определении координат точки P по известным координатам двух точек A и B (рис.1.11). Для этого достаточно измерить на местности угол β и расстояние S_{B-P} .

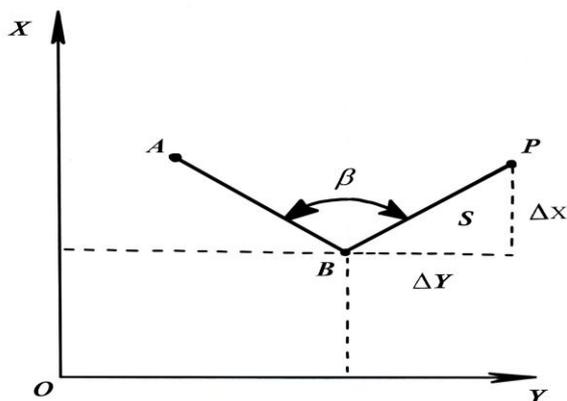


Рис.1.11. Полярный метод определения координат точки

По координатам точек A и B можно вычислить дирекционный угол линии I-II $\alpha_{AB} = \arctg \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$. Тогда приращения координат вычисляют по формулам

$$\Delta X_{BP} = S_{BP} \cos \alpha_{BP};$$

$$\Delta Y_{II-A} = S_{BP} \sin \alpha_{BP}.$$

Дирекционный угол линии BP может быть получен по формуле $\alpha_{BP} = \alpha_{AB} + \beta \pm 180^\circ$,

и координаты точки P вычисляют из соотношений

$$X_P = X_B + \Delta X_{BP};$$

$$Y_P = Y_B + \Delta Y_{BP}.$$

Погрешность положения определяемой точки относительно исходных может быть рассчитана по формуле

$$m_t = \sqrt{m_S^2 + \left(S \frac{m_\beta}{\rho} \right)^2},$$

где m_S и m_β – соответственно СКП измерения расстояния и угла.

1.6.2. Проложение линейно-углового хода (теодолитный ход)

По существу задача проложения теодолитного хода является n – кратным повторением рассмотренной ранее задачи.

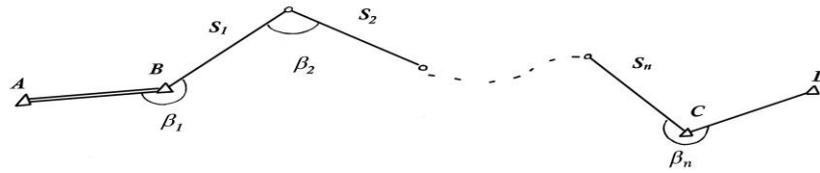


Рис.1.12. Определение координат точки методом проложения теодолитного хода

При этом может быть осуществлен контроль проведения определений координат, т.к. в конечном счете, можно осуществить сравнение вычисленных координат конечной торчки хода C с известными ее координатами. Наиболее слабой частью (с точки зрения точности) этого геодезического построения является точка, расположенная в середине хода. Для вытянутого хода погрешность положения средней точки хода относительно исходных пунктов может быть получена из соотношения

$$m_t = \sqrt{m_s^2 \frac{n}{4} + \left(L \frac{m_\beta}{\rho} \right)^2 \frac{n+3}{192}},$$

где m_s и m_β – соответственно СКП измерения длины линии и угла;

L – длина хода;

n – число углов в ходе.

1.6.3.Прямая засечка

Сущность прямой засечки состоит в определении координат третьего пункта по координатам двух исходных пунктов и двум измеренным примычным углам, обеспечивающим передачу дирекционного угла с направления исходного пункта на определяемый.

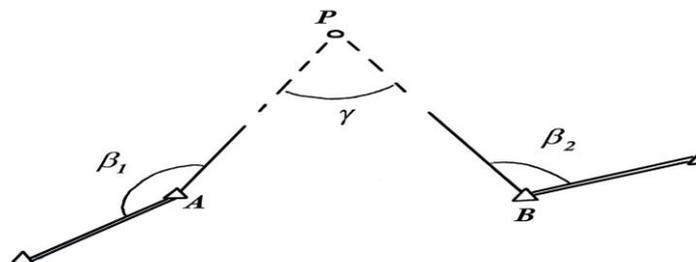


Рис.1.13.Определение координат точки методом прямой (угловой) засечки

Погрешность положения определяемого пункта относительно исходных пунктов получают из соотношения

$$m_t = \frac{m_\beta}{\rho \sin \gamma} \sqrt{S_1^2 + S_2^2},$$

где m_β – СКП измерения угла;

γ – угол при засечке;

S_1, S_2 – расстояния от исходных точек до определяемой

1.6.4. Линейная засечка

Сущность линейной засечки состоит в определении координат третьей точки по координатам двух исходных точек и по двум расстояниям от исходных до определяемого.

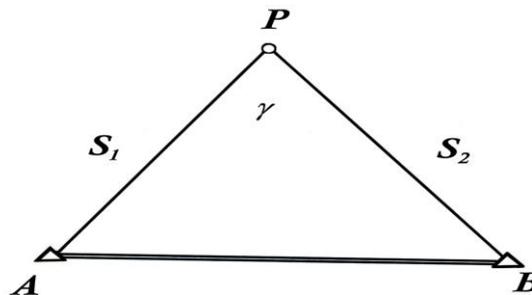


Рис.1.14. Определение координат точки методом линейной засечки

Погрешность положения определяемого пункта относительно исходных может быть рассчитана по формуле

$$m_t = \frac{\sqrt{m_{S1}^2 + m_{S2}^2}}{\sin \lambda},$$

где m_S – СКП измерения линии;

λ – угол при засечке.

1.6.5. Обратная угловая засечка

Сущность обратной засечки заключается в определении координат четвертого пункта по координатам трех исходных пунктов и двум углам, измеренным на определяемом пункте.

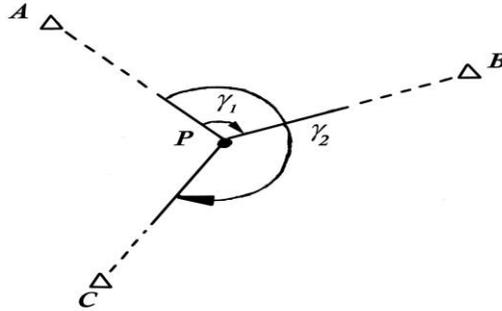


Рис.1.15.Определение координат точки методом обратной угловой засечки.

Погрешность положения определяемого пункта относительно исходных может быть рассчитана по формуле

$$m_t = \frac{m_\beta}{|\rho \sin(\angle ABC + \gamma_2)|} \cdot \frac{BP}{\sqrt{\left(\frac{AP}{AB}\right)^2 + \left(\frac{CP}{CB}\right)^2}}$$

При решении данной задачи опасным является случай, когда все четыре точки лежат на одной окружности. В этом случае $\angle ABC + \gamma_2 = 180^\circ$, а синус этого угла равен нулю. Следовательно, погрешность положения определяемой точки стремится к бесконечности, т.е. задача не имеет решения.

1.7 Форма и размеры Земли

При решении ряда геодезических задач требуется знать форму и размеры Земли, не являющаяся правильным геометрическим телом. Ее физическая поверхность (в особенности поверхность суши) очень сложная. Поэтому в геодезии для определения фигуры Земли используется т.н. *уровенная поверхность*. *Уровенная поверхность* представляет собой всюду выпуклую поверхность, касательная к которой в любой точке перпендикулярна направлению отвесной линии. Фигура, ограниченная *уровенной поверхностью*, проходящей через начало счета высот, называется *геоидом*.



Рис.1.16. Уровенная поверхность

Из-за неравномерного распределения притягивающих масс в теле Земли поверхность геоида является весьма сложной и, что очень важно, ее невозможно определить по измерениям на поверхности Земли. В связи с чем была введена поверхность, названная *квазигеоидом*, которая не менее сложная, чем поверхность геоида, но которую можно определить с необходимой точностью по результатам измерений на земной поверхности. Поверхность квазигеоида совпадает с геоидом в открытых морях и океанах, а на суше уклоняющаяся от поверхности геоида не более чем на несколько сантиметров в условиях равнинной местности и несколько метров в горных районах.

Преимущество представления фигуры Земли в виде квазигеоида заключается также в возможности строго связать его сложную геометрическую поверхность с более простой – поверхностью общего земного эллипсоида. *Общий земной эллипсоид* (Рис. 1.17.) представляет собой поверхность эллипсоида вращения, т.е. замкнутую поверхность второго порядка, получаемую вращением эллипса вокруг его малой оси.

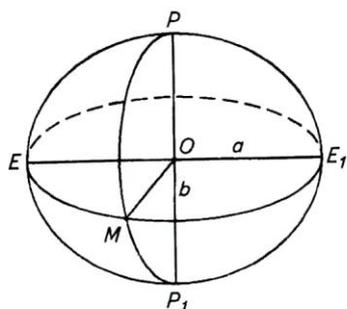


Рис.1.17. Общий земной эллипсоид

Размеры общего земного эллипсоида вполне определяются его большой $OE = OM = OE_1 = a$ и малой $OP = b$ полуосями. Кроме большой и малой полуосей характеристиками фигуры эллипсоида служат его сжатие

$$\alpha = (a - b) / a,$$

а также эксцентриситет

$$e = \sqrt{(a^2 - b^2)} / a.$$

Эксцентриситет и сжатие связаны соотношением:

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2.$$

Ранее параметры общего земного эллипсоида устанавливались по наземным измерениям. Использование в последнее время методов космической геодезии позволило значительно уточнить его параметры. По результатам многочисленных наблюдений ИСЗ в России получены параметры земного эллипсоида в системе ПЗ-90 (геодезическая система отсчета «Параметры Земли 1990 г.»). В США проведены аналогичные работы и получены параметры общего земного эллипсоида в системе WGS-84 (Всемирная геодезическая система 1984 г). Основные параметры соответствующих общих земных эллипсоидов приведены ниже:

<i>Параметр</i>	<i>ПЗ-90</i>	<i>WGS-84</i>
Большая полуось эллипсоида	6378136 м	6378137 м
Сжатие	1:298,257839	1:298,257234

При решении геодезических, картографических, кадастровых и других задач по обеспечению топографо-геодезическими данными различных областей народного хозяйства каждое государство обычно принимает вместо общего земного эллипсоида так называемый референц-эллипсоид (референц – рекомендуемый).

В Российской Федерации в качестве референц-эллипсоида используется эллипсоид Красовского с параметрами: большая полуось 6378245 м; сжатие 1:298,3.

Для решения многих практических задач фигуру Земли представляют в виде шара, равновеликого по объему общему земному эллипсоиду. Радиус такого шара приблизительно равен 6371,1 км.

1.8. Системы координат (СК), принятые в геодезии

В предыдущем разделе рассмотрены методы передачи координат на плоскости. Однако Земля, как было указано выше, имеет сложную поверхность, в связи с чем необходимо рассмотреть вопрос с определением положения точки на поверхности Земли, а затем перейти к плоскостным задачам. Рассмотрим системы координат, применяемые в геодезии.

1.8.1. Система геоцентрических пространственных прямоугольных координат

Начало данной системы координат, (Рис.1.16.) совмещено с центром масс Земли (*геоцентрическая система координат*)

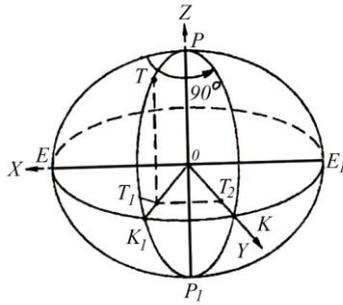


Рис 1.18. Система геоцентрических пространственных прямоугольные координаты

Ось $OZ P_1OP$ направлена в Международное условное начало (МУН), положение которого определяют по данным Международной службы движения земных полюсов; ось OX – лежит в плоскости земного экватора и направлена по линии пересечения плоскости экватора с плоскостью начального (Гринвичского) меридиана P_1EP ; ось OY – дополняет систему координат до правой.

Общий земной эллипсоид в геоцентрической системе координат располагается следующим образом:

1. Центр эллипсоида помещен в центр масс Земли;
2. Малая полуось располагается по линии OZ ;
3. В качестве начального меридиана на эллипсоиде принимается кривая на поверхности эллипсоида, образованная сечением эллипсоида плоскостью XOZ .

Положение точки T в системе пространственных прямоугольных координат определяется тремя координатами: X_T – абсциссой (T_1, T_2); Y_T – ординатой (O, T_2), и Z_T – аппликатой (T_1, T).

1.8.2. Референсная система координат

Система референчных координат связана с конкретным референц-эллипсоидом. Координатными линиями этой системы на поверхности эллипсоида являются меридианы и параллели (Рис. 1.19.). Начало данной СК совпадает с центром референц – эллипсоида, положение которого не совпадает с центром масс Земли. Направление малой полуоси и плоскость начального меридиана почти параллельны соответственно линии OZ и плоскости XOZ геоцентрической системы координат. Эта непараллельность и несовпадение центров объясняются неизбежными погрешностями геодезических измерений. Параллели на эллипсоиде лежат в плоскостях, перпендикулярных его малой оси. Плоскость экватора совпадает с плоскостью XOY пространственной прямоугольной системы координат. Меридианы образуются сечениями поверхности эллипсоида плоскостями, проходящими через точки PP' (Рис 1.19.).

Положение точки относительно эллипсоида задают ее эллипсоидальные координаты: широта B , долгота L и высота H . Часто эти координаты называют геодезическими широтой, долготой и высотой.

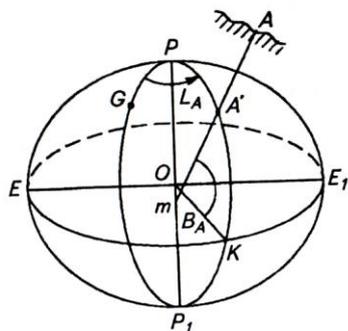


Рис. 1.19. Референсные координаты

Геодезическая широта B - острый угол, образованный нормалью к поверхности эллипсоида, проведенной через заданную точку на поверхности Земли, и плоскостью экватора. Геодезической долготой L называют двугранный угол между плоскостью гринвичского (начального) меридиана и плоскостью меридиана данной точки. Геодезической высотой H является отрезок по нормали к эллипсоиду от точки, находящейся на земной поверхности, до поверхности эллипсоида.

Геодезические широты бывают северные и южные и изменяются от 0° (на экваторе) до $\pm 90^\circ$ на полюсах. Геодезические долготы различают как восточные и западные. Они изменяются от 0° на Гринвичском меридиане до 180° на его тихоокеанской ветви.

Геодезическая высота H измеряется от поверхности референц – эллипсоида и положительна в направлении внешней нормали.

1.8.3. Плоские прямоугольные координаты. Государственная система координат

Изобразить поверхность эллипсоида на плоскости без ее искажений невозможно, поэтому приходится строить плоские изображения земной поверхности с учетом некоторых, заранее принятых математических зависимостей между координатами точек на эллипсоиде и их изображением на плоскости. Способы изображения земной поверхности на плоскости определяются видом картографической проекции.

При проектировании на плоскость задаются математические зависимости вида

$$X = f_1(B, L);$$

$$Y = f_2(B, L),$$

где X, Y – плоские прямоугольные координаты.

Разработано большое количество различных видов картографических проекций, отличающихся видом функций f_1 и f_2 и имеющих различные

виды неизбежных искажений. В одних проекциях искажаются по определенному закону все проектируемые элементы: горизонтальные углы и линии, но сохраняются отношения площадей. В других не искажаются углы, в связи с чем сохраняется подобие бесконечно малых фигур.

Для составления топографических карт на территории бывшего СССР с 1928 года принята так называемая проекция Гаусса – Крюгера.

В проекции Гаусса – Крюгера вся земная поверхность делится меридианами на шести- или трехградусные зоны. Выбор размера зоны будет объяснен несколько позже.

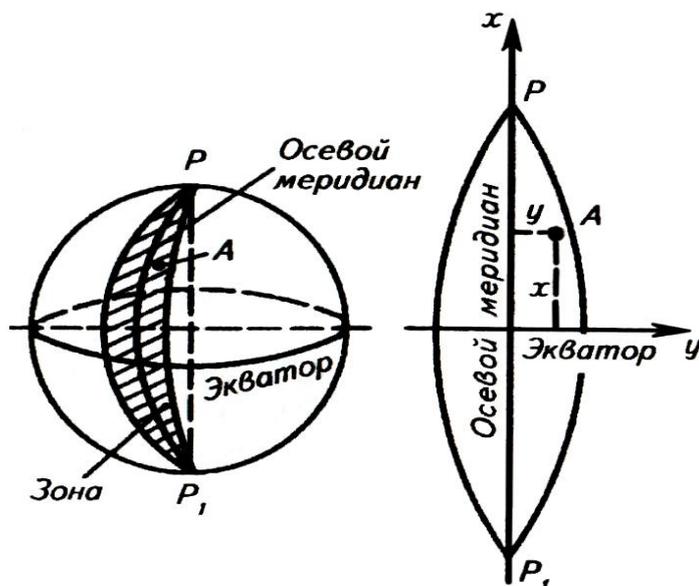


Рис.1.20. Зоны и осевые меридианы зон

Рассмотрим свойства проекции Гаусса – Крюгера при разделении земной поверхности на шестиградусные зоны. Границами шестиградусных зон являются меридианы с долготой, кратной шести градусам, т.е. меридианы с долготой 0, 6, 12, .. градусов. Зоны нумеруются арабскими цифрами, начиная с первой от гринвичского меридиана. Внутри каждой зоны центральный меридиан выбирается осевого с долготой, рассчитываемой по формуле

$$L_0 = 6^\circ N - 3^\circ,$$

где N – номер зоны.

В проекции Гаусса - Крюгера в каждой зоне осевой меридиан представляет ось абсцисс (OX), а экватор представляет ось ординат (OY). Они изображаются на плоскости взаимно перпендикулярными прямыми (Рис.1.20).

Проекция Гаусса - Крюгера имеет следующие особенности:

1. Перенос с эллипсоида на плоскость осуществляется по зонам.
2. На осевом меридиане каждой зоны искажения отсутствуют, т.е. масштаб изображения равен единице;
3. Проекция обладает свойством осевой симметрии, т.е. в точках, симметричных расположенных относительно осевого меридиана искажения одинаковы;

4. Проекция конформна, т.е. при проектировании углы не искажаются, и сохраняется подобие бесконечно малых фигур.

Запишем следующий общий вид формул перехода от эллипсоидальных к прямоугольным координатам:

$$X = f_1(B, \Delta L);$$

$$Y = f_2(B, \Delta L),$$

где $\Delta L = L - L_0$ есть разность долгот точки и осевого меридиана.

Проекция Гаусса – Крюгера удобна в том плане, что единообразно осуществляется перевычисление координат во всех зонах. Прямоугольные координаты любой точки вычисляются по единому же алгоритму вне зависимости от зоны, т.к. прямоугольные координаты зависят не от долготы точки, а от разности долгот ΔL . Ординаты точек, расположенных восточнее осевого меридиана имеют знак «плюс», а западнее – знак «минус». Эти знаки совпадают со знаками разностей долгот ΔL . Наличие знаков у координат точек создает некоторое неудобство в пользовании. В связи с этим практикуется к вычисленным в проекции Гаусса – Крюгера значениям ординат точек прибавлять 500 км и после этого впереди приписывать номер зоны. Например, Москва находится в шестиградусной зоне 7. Пусть точки A и B имеют соответственно ординаты $y_A = +12884,27$ м и $y_B = -206368,69$ м. Тогда их преобразованные координаты будут соответственно равны $y_A = 7512884,27$ м и $y_B = 7293631,31$ м. Такое преобразование дает возможность получать однозначные положительные координаты X и Y для всей территории Российской Федерации.

Представленная система плоских прямоугольных координат является **Единой Государственной системой координат Российской Федерации.**, применяемой для предоставления сведений:

- об объектах железнодорожного, автомобильного, морского, речного, воздушного и трубопроводного транспорта; об объектах единой энергосети расположенных более чем в одном кадастровом округе;
- об объектах подлежащих открытому объявлению в соответствии с международными обязательствами Российской Федерации;
- о геодезических пунктах государственных или специальных геодезических сетей, расположенных на территории двух и более субъектов Российской Федерации;
- о границах зон с особыми условиями использования территорий, расположенных в двух и более субъектов Российской Федерации;
- при создании кадастровых карт масштабов 1:200 000 и мельче, если картографированием затрагивается территории двух и более субъектов Российской Федерации.

Пользование координатами единой Государственной системы координат осуществляется следующим образом.

- организация, осуществляющая определение координат границ объекта кадастрового учета в Государственной системе координат (далее – организация исполнитель работ), обращается в орган кадастрового учета для

получения информации о наименовании (условном обозначении) системы координат, в которой должны быть предоставлены координаты объекта кадастрового учета;

- организация исполнитель работ в соответствии с информацией о наименовании системы координат, полученной от органа кадастрового учета, обращается в установленном порядке в территориальные органы Роскартографии для получения координат исходных геодезических пунктов в Государственной системе координат;

- после постановки объекта на кадастровый учет организация исполнитель работ полученные координаты исходных геодезических пунктов в Государственной системе координат уничтожает в установленном порядке. Накопление координат геодезических пунктов в Государственной системе координат в организациях не допускается.

Основанием для предоставления территориальными органами Роскартографии координат геодезических пунктов в Государственной системе координат является:

копия технического задания, в соответствии с которым будут осуществляться геодезические работы;

специальное разрешение на осуществление геодезической деятельности, если это предусмотрено федеральным законодательством;

специальное разрешение на работы с документами, содержащими сведения составляющую государственную тайну;

справка, полученная от органа кадастрового учета с указанием наименования системы координат, в которой будет осуществляться постановка объекта на кадастровый учет.

Никаких иных разрешительных документов, регистрации работ и т.п. не требуется.

Причиной для отказа в выдаче координат геодезических пунктов в Государственной системе координат, является отсутствие или несоответствие представленных документов требованиям настоящего Порядка.

Предоставление территориальными органами Роскартографии координат геодезических пунктов в Государственной системе координат или мотивированный отказ в их предоставлении осуществляется в 5-ти дневный срок с момента обращения.

1.8.4. Порядок перехода от линий и площадей местности на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера

При переходе от длин линий на физической поверхности Земли к их отображению на плане в проекции Гаусса-Крюгера приходится выполнять несколько операций, каждая из которых вносит свои искажения, как в длины линий, так и в площади образованных линиями фигур. Рассмотрим каждое из этих действий:

Измеренное на местности расстояние между двумя точками A и B должна быть спроецировано на горизонтальную плоскость (Рис. 1.21.), проведенную через точку A .

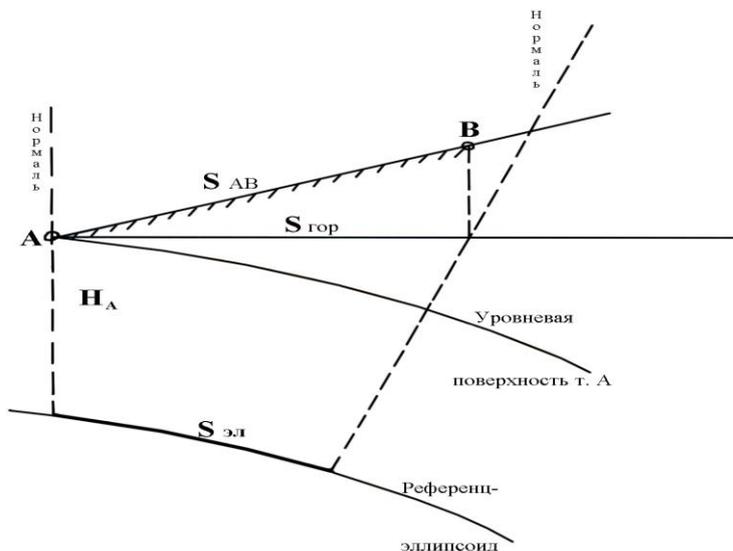


Рис. 1.21. Переход от измеренного расстояния к горизонтальному проложению и к проекции на референц - эллипсоиду

При этом горизонтальное проложение $S_{гор}$

$$S_{гор} = S_{AB} \cos \nu = S_{AB} - \Delta S_{гор} = S_{AB} - 2S_{AB} \sin^2 \frac{\nu}{2},$$

где S_{AB} – измеренное (физическое) расстояние между точками A и B ;
 ν – угол наклона линии местности.

В этом случае происходит уменьшение длины линии местности.

Далее, горизонтальное проложение линии местности проецируется на поверхность референц – эллипсоида (Рис. 1.6.).

Горизонтальное проложение линии местности связано с ее проекцией на эллипсоид соотношением:

$$S_{гор} = S_{эл} + S_{эл} \frac{H}{R}, \text{ или } S_{эл} = S_{гор} - S_{гор} \frac{H}{R} = S_{AB} - S_{AB} \sin^2 \frac{\nu}{2} - S_{гор} \frac{H}{R}$$

где $S_{гор}$ – горизонтальное проложение линии местности;

$S_{эл}$ – его проекция на поверхность эллипсоида;

H – средняя высота участка над поверхностью эллипсоида;

R – радиус Земли.

Эта процедура уменьшает значение горизонтального проложения линии местности тем больше, чем выше линия находится по отношению к референц – эллипсоиду.

Следующим этапом происходит переход с поверхности эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса – Крюгера.

Рассмотрим величину искажения длины линии, средняя точка которой отстоит от осевого меридиана на расстоянии y . Величина этого искажения будет равна

$$\frac{\Delta S_{np}}{S_{эл}} = \frac{y^2}{2R^2},$$

где $S_{эл}$ – длина линии на эллипсоиде, центр которой удален от осевого меридиана на величину y ;

ΔS_{np} – величина искажения (удлинения) линии при переходе с эллипсоида на плоскость;

R – средний радиус Земли.

Величину $\frac{y^2}{2R^2}$ называют относительным искажением линии.

Тогда линия AB на плане будет иметь значение S_{np} , вычисляемое по формуле:

$$S_{np} = S_{эл} + \Delta S_{np} = S_{AB} - 2S_{AB} \sin^2 \frac{\nu}{2} - S_{гор} \frac{H}{R} + S_{эл} \frac{y^2}{2R^2}.$$

Следует отметить, что по такой формуле вычисления непосредственно не проводят. Формула приведена, чтобы проследить всю цепочку преобразований от процесса полевых измерений до изображения линии в проекции Гаусса – Крюгера.

Рассмотрим пример расчета величин поправок, получаемых на различных этапах для линии местности длиной 1000,00 м, проходящей под углом наклона $\nu = 1^\circ$, расположенной на местности, имеющей среднюю высоту над поверхностью эллипсоида 300 м и расположенной в удалении от осевого меридиана на расстоянии $y = 200$ км.

При этих условиях

$$\Delta S_{гор} = 2S_{AB} \sin^2 \frac{\nu}{2} = 0,15 \text{ м.}$$

Горизонтальное проложение равно

$$S_{гор} = S_{AB} - \Delta S_{гор} = 999,85 \text{ м.}$$

При $H = 300$ м величина искажения линии при переходе на референц – эллипсоид равна

$$\Delta S_{эл} = S_{гор} \frac{H}{R} = 999,85 \frac{0,3}{6370} = 0,05 \text{ м.}$$

Длина линии AB на эллипсоиде составит

$$S_{эл} = S_{гор} - \Delta S_{эл} = 999,80 \text{ м.}$$

При переходе от эллипсоида к плоскости в проекции Гаусса – Крюгера происходит растяжение линии на величину, равную

$$\Delta S_{np} = S_{эл} \frac{y^2}{2R^2} = 999,80 \frac{100^2}{2 \cdot 6370^2} = 0,49 \text{ м.}$$

Тогда длина линии AB на плоскости в проекции Гаусса-Крюгера будет иметь длину

$$S_{np} = S_{эл} + \Delta S_{np} = 1000,29 \text{ м.}$$

Естественно говорить и об искажениях площадей при переходе от местности через проецирование на горизонтальную плоскость, затем на поверхность эллипсоида и от нее на плоскость в проекции Гаусса – Крюгера. Поэтапное искажение площади земельного участка будет определяться следующими соотношениями:

$$\Delta P_{гор} = 2P_{физ} \sin^2 \frac{\nu}{2};$$

$$P_{гор} = P_{физ} - \Delta P_{гор};$$

$$\Delta P_{эл} = 2P_{гор} \frac{H}{R};$$

$$P_{эл} = P_{гор} - \Delta P_{эл};$$

$$\Delta P_{np} = P_{эл} \frac{y^2}{R^2};$$

$$P_{пл} = P_{эл} + \Delta P_{np},$$

где $P_{физ}$ – площадь земельного участка на местности (физическая площадь);

$\Delta P_{гор}$ – поправка за уклон местности, обеспечивающая переход от физической местности на горизонтальную плоскость;

$P_{гор}$ – площадь участка на горизонтальной плоскости;

$\Delta P_{эл}$ – поправка за высоту местности над поверхностью референц – эллипсоида;

$P_{эл}$ – площадь участка, спроектированного на поверхность референц – эллипсоида;

ΔP_{np} – поправка, обеспечивающая переход на плоскость в проекции Гаусса – Крюгера;

P_{np} – площадь земельного участка на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера;

ν – средний угол наклона местности;

H – средняя высота местности над поверхностью референц – эллипсоида.

Рассмотрим пример расчета величин поправок, получаемых на различных этапах для земельного участка площадью 1000 га, имеющего средний угол наклона $\nu = 1^\circ$, расположенный на местности, имеющей среднюю высоту над поверхностью эллипсоида 300 м в удалении от осевого меридиана на расстоянии $y = 200$ км.

При этих условиях

$$\Delta P_{гор} = 2P_{физ} \sin^2 \frac{V}{2} = 0,15 \text{ га.}$$

Площадь проекции участка на горизонтальную плоскость будет равно

$$P_{гор} = P_{физ} - \Delta P_{гор} = 999,85 \text{ га.}$$

При $H = 300 \text{ м}$ величина искажения площади при переходе на референц – эллипсоид равна

$$\Delta P_{эл} = 2P_{гор} \frac{H}{R} = 999,85 \frac{0,3}{6370} = 0,10 \text{ га.}$$

Площадь земельного участка на эллипсоиде составит

$$P_{эл} = P_{гор} - \Delta P_{эл} = 999,75 \text{ га.}$$

При переходе от эллипсоида к плоскости в проекции Гаусса – Крюгера происходит растяжение земельного участка на величину, равную

$$\Delta P_{пр} = P_{эл} \frac{y^2}{R^2} = 999,80 \frac{100^2}{6370^2} = 0,99 \text{ га.}$$

Тогда земельного участка на плоскости в проекции Гаусса-Крюгера будет равна

$$P_{пр} = P_{эл} + \Delta P_{пр} = 1000,74 \text{ га.}$$

1.8.5. Местные системы координат

В целях ведения государственного кадастра недвижимости на территории Российской Федерации применяют местные системы координат.

Обычно местную систему координат задают в пределах территории кадастрового округа. Местная система плоских прямоугольных координат является системой прямоугольных геодезических координат проекции Гаусса - Крюгера с измененной координатной сеткой.

В общем случае осевой меридиан местной системы координат не совпадает с каким-либо осевым меридианом шестиградусной зоны. При разработке местной системы координат используют параметры эллипсоида Красовского.

Местная система координат имеет название, в виде кода субъекта Российской Федерации, на территории которого она построена.

Для каждой местной системы координат устанавливаются следующие параметры, называемые «ключом» местной системы координат:

1. Долгота осевого меридиана первой зоны L_0 ;
2. Число координатных зон N ;
3. Координаты условного начала X_0, Y_0 ;
4. Угол поворота θ осей координат;
5. Масштаб местной системы координат относительно плоской системы координат СК-42 или СК-95 в проекции Гаусса - Крюгера;

6. Референц-эллипсоид, к которому отнесены измерения в местной системе координат;
7. Формулы преобразования эллипсоидальных координат B, L в плоские прямоугольные.

Условное начало X_0, Y_0 в местных системах назначают так, чтобы координаты в пределах зоны были положительными, а абсциссы не имели тысяч километров.

1.8.6. Переход от геодезических (эллипсоидальных) координат к плоским прямоугольным координатам и обратно

Осуществление кадастровой деятельности в области межевания земель выполняется в системе плоских прямоугольных координат, основанной на проекции Гаусса – Крюгера.

Часто возникает необходимость в переходе из одной системы в другую, либо необходим переход из одной зоны в другую. Такой переход осуществляется перевычислением из системы плоских прямоугольных координат (X, Y) в систему геодезических координат (B, L) и обратно.

Рассмотрим поэтапно решение отдельных звеньев, а затем, в зависимости от возникшей задачи, объединим их в определенную цепочку.

Вычисление прямоугольных координат X и Y и гауссова сближения меридианов по данным геодезических(эллипсоидальных) B и L координатам в заданной точке.

Пусть заданы геодезические координаты B и L какой-либо точки, расположенной в зоне с осевым меридианом L_0 , и требуется вычислить плоские прямоугольные координаты X и Y и гауссово сближение меридианов γ в этой точке. Для вычисления воспользуемся формулами:

$$X = 6367558,4969 \frac{B''}{\rho''} - (a_0 - 0,5Nl^2 - a_4Nl^4 - a_6Nl^6) \sin B \cos B;$$

$$Y = (Nl + a_3Nl^3 + a_5Nl^5) \cos B;$$

$$\gamma = l'' \sin B + \frac{1}{3} l^2 l'' \sin B \cos^2 B (1 + 0,00674 \cos^2 B).$$

В представленных формулах приняты следующие обозначения:

$$l = \frac{(L - L_0)''}{\rho''} - \text{разность долгот данной точки и осевого меридиана,}$$

выраженная в радианной мере;

$$\begin{aligned}
N &= 6399698,902 - [21562,267 - (108,973 - 0,612 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B; \\
a_0 &= 32140,404 - [135,3302 - (0,7092 - 0,0040 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B; \\
a_4 &= (0,25 + 0,00252 \cos^2 B) \cos^2 B - 0,04166; \\
a_6 &= (0,166 \cos^2 B - 0,084) \cos^2 B; \\
a_3 &= 1/3 \cos^2 B + 0,001123 \cos^4 B - 1/6; \\
a_5 &= 0,0083 - 0,1667 \cos^2 B + 0,1968 \cos^4 B - 0,0040 \cos^6 B.
\end{aligned}$$

Значение ординаты Y получают относительно осевого меридиана.

Вычисление геодезических координат B и L , гауссова сближение меридианов по прямоугольным координатам X и Y

Обратный ход вычислений, т.е. нахождение B и L , а также γ по значениям X и Y выполняется по формулам:

$$\begin{aligned}
B &= B_x - [1 - (b_4 - 0,12z^2)z^2]z^2 b_2 \rho''; \\
L &= L_0 + l; \\
l &= [1 - (b_3 - b_5 z^2)z^2]z \rho''; \\
\gamma &= \{1 - [0,33333 - 0,00225 \cos^4 B_x]z^2\}z \sin B_x \rho''.
\end{aligned}$$

В этих формулах приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
z &= Y / (N_x \cos B_x); \\
B_x &= \beta + \{50221746 + [293622 + (2350 + 22 \cos^2 \beta) \cos^2 \beta] \cos^2 \beta\} \times \\
&\times 10^{-10} \sin \beta \cos \beta \rho''; \\
\beta &= X \rho'' / 6367558,4969; \\
N_x &= 6399698,902 - [21562,267 - (108,973 - 0,612 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x] \cos^2 B_x; \\
b_2 &= (0,5 + 0,003368 \cos^2 B_x) \sin B_x \cos B_x; \\
b_3 &= 0,333333 - (0,166667 - 0,001123 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x; \\
b_4 &= 0,25 + (0,16161 + 0,00562 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x; \\
b_5 &= 0,2 - (0,1667 - 0,0088 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x.
\end{aligned}$$

Пример перевычислений координат точки из одной системы в другую приведен в методических указаниях.

Переход из Государственной системы координат в местную систему и обратно

Как было указано ранее, местная система координат определяется следующими «ключами»:

3. Долгота осевого меридиана первой зоны L_0 ;
4. Число координатных зон N ;
5. Координаты условного начала X_0, Y_0 ;
6. Угол поворота θ осей координат;
7. Масштаб местной системы координат относительно плоской системы координат СК-42 или СК-95;
8. Референц-эллипсоид, к которому отнесены измерения в местной системе координат;
9. Формулы преобразования геодезических координат в плоские прямоугольные.

Рассмотрим алгоритм перехода из Государственной системы координат в местную систему.

Пусть заданы координаты точки (X_G, Y_G) в Государственной системе координат. Необходимо перейти в соответствующую местную систему координат при условии, что все ключи заданы.

Прежде всего, необходимо перейти из системы плоских прямоугольных координат в систему геодезических координат, т.е. вычислить для заданной точки значения (B, L) по изложенной выше методике. Далее, учитывая заданную долготу меридиана первой зоны L_0 , определить долготу осевого меридиана зоны, в которой расположена исходная точка. Пусть долгота этого меридиана равна $L_0^k = L_0 + 6^\circ(k - 1)$, где k – номер координатной зоны, изменяющейся от 1 до N .

Далее вычисляют разность долгот $l = L - L_0^k$. По значениям (B, l) вычисляют прямоугольные координаты по методике, изложенной выше. При этом получают «промежуточные» значения плоских прямоугольных координат заданной точки. Дальнейшие преобразования осуществляют преобразованием координат в плоскости. Прежде всего, необходимо осуществить перенос начала координат в точку X_0, Y_0 . После этого требуется осуществить масштабирование системы с учетом заданного масштаба и разворот осей координат на угол θ . Формулы плоскостного преобразования представлены в разделе 1.5.

Естественно, такой переход требует значительного объема вычислений, но при массовых перевычислениях задача легко решается с применением ЭВМ и соответствующих программных средств.

Переход из местной системы координат в государственную осуществляется в обратном порядке. Предварительно необходимо провести обратное масштабирование и обратный разворот осей координат, провести перенос начала координат и получить «промежуточные» координаты. Далее необходимо перейти к геодезическим координатам, и от них – к плоским прямоугольным координатам государственной системы координат.

В заключение следует заметить, что все приведенные выше формулы действительны для референц – эллипсоида Красовского.

1.9. Системы высот, принятые в геодезии

Положение точек местности по высоте относительно квазигеоида характеризуется в системе нормальных высот H^γ , исходной точкой которой является нуль Кронштадтского футштока (Балтийская система высот).

Нормальная высота H^γ с геодезической высотой H , определяющей высоту точки над эллипсоидом связана следующим соотношением

$$H = H^\gamma + \zeta,$$

где ζ – аномалия высоты, т.е. высота квазигеоида над отсчетным эллипсоидом.

Высоты квазигеоида над отсчетным эллипсоидом вычисляют в соответствии с моделями гравитационного поля Земли. Данные о высотах квазигеоида над эллипсоидом Красовского отображаются на соответствующих карт-схемах.

На топографических картах отображают нормальные нивелирные высоты точек земной поверхности, однако слово «нормальная» опускают. Также в учебной и технической литературе нормальную высоту часто обозначают латинской буквой H без индекса γ .

1.10. Государственная геодезическая сеть

Государственная геодезическая сеть (ГГС) имеет важнейшее научное и народнохозяйственное значение, в связи с чем пункты ГГС должны быть надежно закреплены на местности, рассчитаны на длительный срок службы, а по точности должны удовлетворять требованиям науки и решению самого широкого спектра производственных задач не только сегодняшнего дня, но и достаточно отдаленного будущего.

История развития геодезии показывает, что с течением времени требования к точности построения ГГС непрерывно возрастают. Вместе с тем, сама по себе ГГС, если ее не обновлять и не совершенствовать, постоянно стареет, утрачивает часть пунктов, теряет точность в отдельных ее частях, особенно из-за движений земной коры.

Для того, чтобы ГГС страны всегда находилась на уровне современных требований, необходимо:

1. систематически проводить полевое обследование всех пунктов сети, восстанавливать или заново определять утраченные пункты сети;
2. периодически выполнять повторные или дополнительные измерения в значительной части сети, особенно в тех ее частях, которые наиболее подвержены движениям земной коры;
3. повторять или дополнять измерения, проводимые для дальнейшего совершенствования и повышения точности ГГС.

4. по мере накопления измерительной информации, совершенствовании средств и методов измерения, пересматривать принципы построения ГГС.

Значительные успехи, достигнутые в деле повышения точности определения координат точек по результатам наблюдений ИСЗ, позволяют в настоящее время пересматривать принципы построения ГГС.

При построении ГГС неизбежно возникают три основных вопроса, имеющих принципиальное значение:

1. выбор схемы построения ГГС на всей территории страны;
2. установление разумной плотности пунктов ГГС.;
3. установление необходимой и достаточной точности взаимного положения пунктов ГГС.

В практике геодезии сложился и вполне оправдал себя принцип построения ГГС для решения как научных, так и инженерно – технических задач. ГГС создается поэтапно, постадийно, соблюдая принцип от общего к частному.

Достаточно долгое время основным методом построения являлся метод триангуляции (три угла). Метод предложен голландским математиком Снеллиусом в 1614 году. Идею этого метода хорошо можно представить на примере сети в виде цепочки треугольников (Рис.1.22).

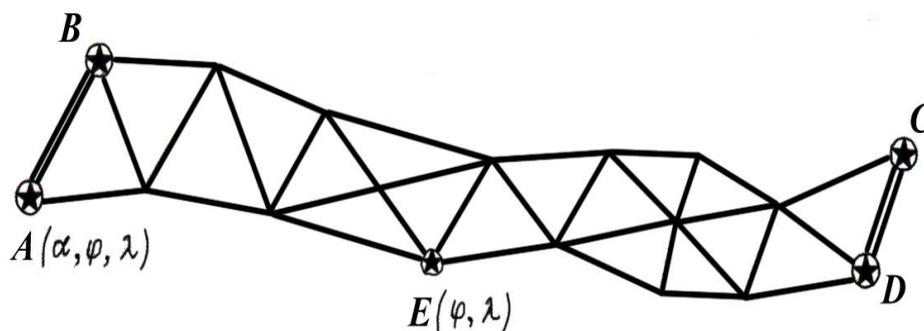


Рис.1.22. Геодезическая сеть в виде цепочки треугольников

В каждом треугольнике измеряют все углы, а в крайних треугольниках - еще и по одной стороне (базису). Здесь следует заметить, что линейные измерения до недавнего времени были необыкновенно трудоемкой процедурой. В связи с этим, метод триангуляции нашел самое широкое распространение при построении государственных геодезических сетей во всех странах мира как метод, требующий минимального количества линейных измерений. Этот метод отличается достаточно большими возможностями осуществления контроля результатов измерений.

По измеренным в первом треугольнике стороне и углам вычисляются по формулам тригонометрии другие стороны. Далее вычисляют стороны в следующем треугольнике, и так доходят до последнего, где одна из сторон известна. Здесь осуществляется контроль сравнением измеренного и вычисленного значения стороны. Если на выходных сторонах измерены

азимуты, то может быть осуществлен еще один контроль сравнением вычисленного и измеренного значения азимута последней линии. Известно также, что сумма углов плоского треугольника равна 180° , что также позволяет контролировать качество угловых измерений.

1.10.1 Исторический очерк создания ГГС в России

В России широкое применение метода триангуляции началось в середине XIX века работами российских геодезистов Теннера и Струве при построении знаменитой дуги Струве. Это было уникальнейшее по тому времени геодезическое построение от берегов Северного Ледовитого океана до Черного моря вдоль западной границы государства Российского. Качество измерений превзошло все мировые стандарты.

В конце XIX – начале XX века в России под руководством шефа Корпуса Военных топографов генерала И.И.Померанцева разрабатывается первая программа построения единой на всю территорию России государственной геодезической сети. В 1910 году была подготовлена первая инструкция по построению ГГС. Предлагалось на всей территории России построить систему замкнутых полигонов из звеньев триангуляции, расположенных вдоль меридианов и параллелей. Периметр полигона составляет примерно 1,5 тысячи километров, т.е. длина одного звена равна примерно 380 – 400 км.

До 1917 года удалось построить только два таких полигона, измерить 4 базиса, построить 152 знака и отнаблюдать 129 пунктов.

На территорию всей России была создана 100-верстная топографическая карта (100 верст в одном дюйме), что соответствует масштабу 1:4 200 000 в метрической системе. Европейская часть России была покрыта 10 - верстной картой (1: 420 000). Карты более крупных масштабов имелись только на некоторые районы, в основном, пограничные.

В 1918 году был подписан декрет о создании Высшего геодезического управления (ВГУ), одной из задач которого было построение на территории Советской России единой государственной геодезической сети.

Первая попытка создания опорной геодезической сети относится к 1924 году, явившаяся, в основном, продолжением работ по программе Померанцева. Предусматривалось построить на территории Европейской части СССР 14 больших полигонов южнее 60 параллели.

В 1928 году выходит работа проф. Ф.Н.Красовского «Схема и программа государственной триангуляции», в которой на основе анализа точности построения триангуляции 1 класса по ранее принятой программе доказывалось, что схема Померанцева не обеспечивает необходимую точность создания ГГС.

Проведя целый ряд научно-исследовательских изысканий, и учитывая опыт работ Теннера, Струве и Померанцева, Красовский предложил строить ГГС также в виде системы нескольких классов. Первый класс триангуляции предложено строить в виде системы полигонов из рядов триангуляции.

Периметр полигонов он предложил делать не более 800 километров, т.е. звено полигона должно быть не более 200 км, при расстоянии между пунктами от 20 до 40 км. Внутри первоклассного полигона строится две взаимно перпендикулярные цепочки треугольников второго основного класса, а далее заполняется все пространство заполняющей сетью второго класса.

На пересечениях рядов триангуляции предлагалось строить, так называемые, пункты Лапласа, в которых проводился весь комплекс астрономических наблюдений, что позволяло определить для этих пунктов астрономические широты и долготы с максимально возможной точностью, а также определить азимуты направлений, исходящих из этих пунктов. Кроме того, в местах пересечений цепочек треугольников выполнялись линейные измерения.

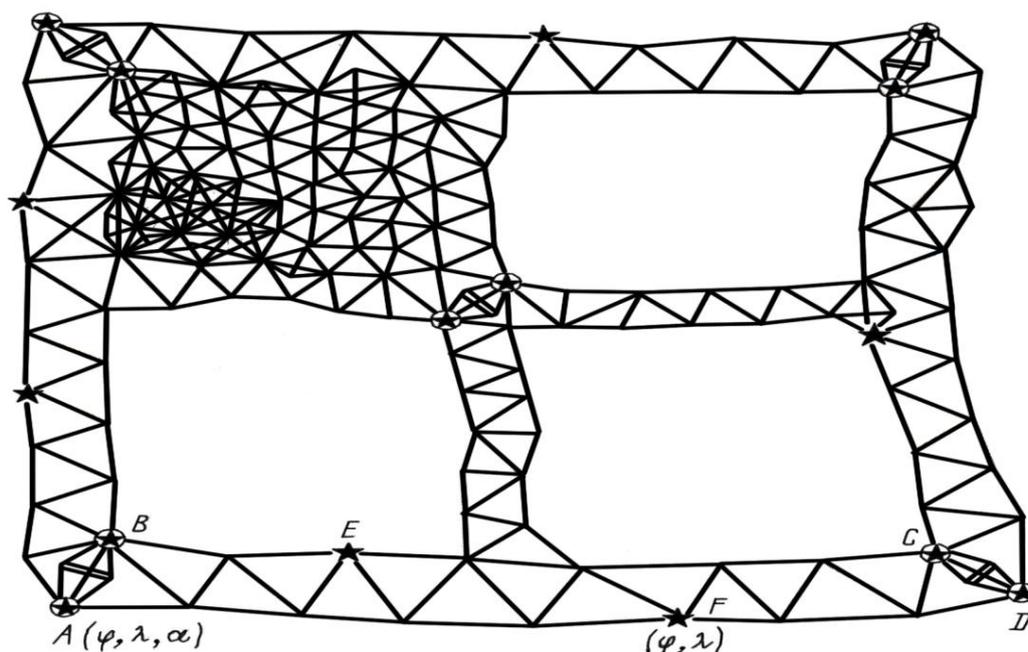


Рис.1.23. Схема построения ГГС, предложенная Ф.Н.Красовским

Основные параметры, характеризующие ГГС, приведены в таблице 1.1

Таблица 1.1

Класс триангуляции	Средние длины сторон	СКП измерения угла	Ошибка стороны в слабом месте	СКП взаимного положения смежных пунктов, м
Ряды 1 класса	25-40	07 – 09"	1:100 000	0,3
Ряды 2 класса	18	1,2 – 1,5"	1:60 000	0,3
Сети 2 класса	11-13	2,0-2,5	1:35 000	0,3

Сети 3 класса	5-8	5"	1^15 00	0,3
Пункты 4 класса	Определялись методом засечек с СКП не более 1 м			

Работы по созданию ГГС были начаты в 1925 году. Вызывает восхищение та потрясающая по объему и качеству работа, которая была выполнена за последующие 15 лет.

На местности было закреплено 4733 пункта, над каждым из которых для обеспечения взаимной видимости строился наружный знак в виде геодезического сигнала (Рис 1.24).

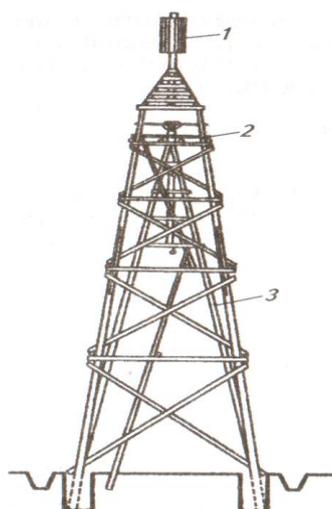


Рис.1.24. Геодезический сигнал

Высота таких сигналов могла достигать 40 метров (тринадцати этажный дом). Угловые измерения выполнялись по достаточно сложной программе, обеспечивающей СКП измерения углов порядка 0,7" – 0,9". Было построено 87 полигонов первого класса.

Линейные измерения проводились по программе, обеспечивающей точность порядка $\frac{1}{300000}$ от длины линии, т.е. при длине линии в 20 км погрешность измерения составляла примерно 7 см.

Параллельно с полевыми измерениями проводилась математическая обработка результатов измерений.

Прежде всего, необходимо было получить по данным полевых измерений, а также данным ранее выполненных измерений в России и Западной Европе и США, параметры земного эллипсоида, наиболее близко подходящего к телу Земли на территории СССР. Этот эллипсоид получил название эллипсоида Красовского.

В дальнейшем, получив параметры земного эллипсоида, можно строить систему геодезических координат $(B; L)$. В этой системе получены координаты всех пунктов триангуляции первого класса. Однако, в криволинейной эллипсоидальной системе геодезических координат решать

инженерные задачи достаточно сложно, поэтому необходимо было перейти от системы (B, L) к прямоугольной системе координат.

Система координат, которая получена на базе эллипсоида Красовского, была разработана к 1942 году, а внедрена в действие Постановлением Правительства 07.04.1946 году под названием СК-42 (Система координат 1942 года).

Некоторые точностные характеристики СК-42:

СКП взаимного положения смежных пунктов - 0,3м,

СКП положения пункта относительно исходного (Пулково) – на западе страны несколько метров, на востоке –до 30 м.

В 1956 году с учетом той колоссальной работы, которая была выполнена в предыдущие годы, приняты новые «Основные положения по созданию и развитию ГГС». (ОП-56), суть которых сводилась к следующему:

Основой является сеть 1 класса, которая строится в виде полигонов. Полигоны первого класса заполняются сплошной сетью 2 класса. Сети 1 и 2 классов являются основой для построения сетей 3 и 4 классов.

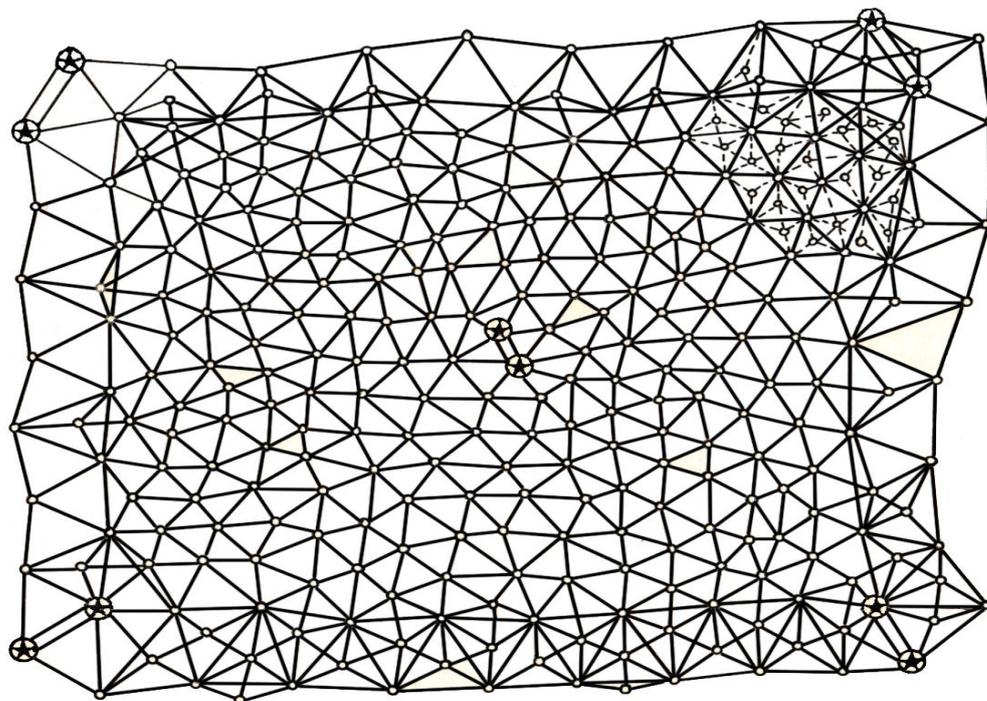


Рис. 1.25 Схема построения ГГС в соответствии с ОП-56

Основные характеристики различных классов ГГС приведены в табл.1.2.

Таблица 1.2.

Класс триангуляции	Средние длины сторон	СКП измерения угла	Относительная ошибка стороны в слабом месте	СКП взаимного положения смежных пунктов, м
1	20-25	0,7"	1:150 000	0,15
2	7-20	1,0"	1:200 000	0,07

3	5-8	1,5''	1:120 000	0,07
4	2-5	2,0''	1:70 00	0,07

К 1968 году СК-42 была распространена на Север; к 1971 – на Крайний Север, и к 1972 – на Дальний Восток.

В начале шестидесятых годов для широкого пользования внедрена наравне с СК-42 система координат СК-63.

СК-42 прослужила около 50 лет. Она полностью обеспечивала создание топографических карт масштаба 1:10 000.

В 70-80 годах прошлого века началась модернизация ГГС, и СКП удаленных пунктов снизилась до 4 метров, а в конце XX века до метровой величины.

С начала 90х годов широкое применение в практике геодезических измерений получают спутниковые системы GPS. В это же время производится переуравнивание всей государственной геодезической сети с учетом построенных к тому времени спутниковых и космических сетей. Постановлением Правительства Российской Федерации от 28.07.2000г. «Об установлении единой государственной системы координат» введена с 1 июля 2002 года система координат СК-95.

1.10.2. Структура и характеристика ГГС по состоянию на 1995 год.

В ГГС входят:

Космическая геодезическая сеть (КГС) – 26 пунктов с СКП взаимного положения - 0,25 м при расстоянии друг от друга 1-1,5 тыс. км.

Доплеровская геодезическая сеть (ДГС) - 131 пункт с СКП взаимного положения 0,5 м при среднем расстоянии между пунктами 600 км.

Астрономо – геодезическая сеть (АГС) состоящая из 164306 пунктов и включающая в себя ряды триангуляции 1 класса, сети полигонометрии и триангуляции 1 и 2 классов и базисы космической триангуляции. Сеть включает в себя 3,6 тысяч геодезических азимутов, полученных из астрономических наблюдений, 2,8 тысяч базисных сторон, расположены через 170 – 200 км. Точностные характеристики сети: СКП измерения углов в триангуляции 1 класса - 0,74'', и второго класса - 1,06''. СКП измерения азимутов – 1,27'', относительная погрешность измерения базисов 1:500 000. СКП взаимного положения смежных пунктов 0,02 – 0,04 м, а при расстоянии до 9000 км 0,25 – 0,80 м.

Геодезические сети сгущения (ГСС) включающие около 300 тысяч пунктов триангуляции и полигонометрии 3 и 4 классов.

Таким образом, ГГС России по состоянию на 1995 год включала в себя более 460 тысяч закрепленных на местности пунктов. Плотность пунктов, как правило, составляет не менее одного пункта на 50 кв. км.

1.10.3. Современная структура Государственной геодезической сети

Анализ состояния ГГС на 1995 год позволил сформулировать принципы решения задач по заданию, поддержанию и воспроизведению системы координат на более высоком уровне требований точности, обеспечивающем решение современных задач геодезии.

Современный уровень технического развития позволяет решать вопросы координатизации пространства на совершенно иных принципах, основанных на применении методов космической геодезии и использовании глобальных навигационных спутниковых систем ГЛОНАСС и GPS.

Государственная геодезическая сеть, создаваемая по новым правилам, строится по принципу перехода от общего к частному и включает в себя геодезические построения различных классов точности:

1. фундаментальная астрономо-геодезическая сеть (ФАГС);
2. высокоточная геодезическая сеть (ВГС);
3. спутниковая геодезическая сеть 1 класса (СГС-1).

На основании этих пунктов создается сеть постоянно действующих дифференциальных станций с целью обеспечения возможностей определения координат потребителями в режиме, близком к реальному времени.

Пункты ФАГС являются исходной геодезической основой для дальнейшего повышения точности всей государственной геодезической сети.

Расстояние между смежными пунктами ФАГС 600-1000 км. СКП взаимного положения – не более 2 см в плане и 3 см по высоте, а относительно начала координат 10 – 15 см.

ВГС представляет собой опирающиеся на пункты ФАГС однородное по точности геодезическое построение, состоящее из системы пунктов, удаленных друг от друга на 150 – 300 км. СКП взаимного положения не должно превышать $3\text{мм} + 5 \times 10^{-8} D$ (где D – расстояние между пунктами) по каждой оси..

СГС – 1 представляет собой пространственное геодезическое построение, создаваемое по мере необходимости и состоящее из системы легко доступных пунктов с плотностью, достаточной для эффективного использования всех возможностей спутниковых определений потребителями со средними расстояниями между пунктами 25-35 км. СКП взаимного положения $3\text{мм} + 1 \times 10^{-7} D$ по каждой оси.

1.10.4. Опорные межевые сети

Геодезические сети сгущения, развиваемые в целях обеспечения ведения государственного кадастра недвижимости называются **опорные межевые сети**.

Опорная межевая сеть (ОМС) является геодезической сетью специального назначения, которую создают для координатного обеспечения Государственного земельного кадастра, государственного мониторинга

земель, землеустройства и других мероприятий при работе с земельным фондом России.

Опорные межевые сети создаются по решениям федеральных органов исполнительной власти, органов государственной власти субъектов Российской Федерации и органов местного самоуправления.

Методы создания опорных межевых сетей, территория на которой они должны быть развиты, плотность пунктов опорных межевых сетей, типы центров пунктов опорных межевых сетей, точность проведения геодезических работ, используемая система координат, необходимость преобразований из одной системы координат в другую и т.д. устанавливаются в технических проектах на создание опорных межевых сетей (далее – технический проект).

Обычно при проектировании ОМС придерживаются следующих правил:

В зависимости от градации обслуживаемых земель опорную межевую сеть создают двух классов, обозначаемых ОМС1 и ОМС2. СКП взаимного положения пунктов не должны превышать для ОМС1 0,05 м для ОМС2 – 0,10м.

ОМС1 создают в городах, а ОМС2 – в прочих населенных пунктах.

Плотность пунктов ОМС должна обеспечить необходимую точность последующих работ по Государственному земельному кадастру, государственному мониторингу земель, землеустройству, и быть:

в черте города – не менее четырех на 1 кв. км;

в черте других поселений - двух на 1 кв. км;

на один населенный пункт площадью менее 2кв.км. – четыре.

Координаты пунктов ОМС определяют либо спутниковыми системами, либо любыми наземными методами, при этом система ОМС должна быть привязаны не менее, чем к двум пунктам ГГС.

Обычно координаты пунктов ОМС определяются в местной системе координат, которая строится на базе СК-95.

Обязательными приложениями к техническому проекту являются:

1. план-график работ, учитывающий природно-климатические условия и установленные заказчиком общие сроки проведения работ;
2. расчет стоимости работ.

Технический проект, разработанный в порядке, установленном законодательством Российской Федерации, согласовывается Федеральным агентством кадастра объектов недвижимости или по его поручению территориальными органами Федерального агентства кадастра объектов недвижимости и утверждается заказчиком работ.

Решение о согласовании или об отказе в согласовании технического проекта принимается Федеральным агентством кадастра объектов недвижимости (его территориальными органами) в течение десяти рабочих дней с даты представления всех необходимых материалов. Основаниями для отказа в согласовании технического проекта являются:

1. несоответствие выбранной системы координат системе координат,

- установленной для ведения государственного кадастра недвижимости;
2. отсутствие в техническом проекте перечня исходных пунктов геодезической сети (государственных геодезических сетей и (или) иных геодезических сетей специального назначения);
 3. несоответствие точности проектируемой опорной межевой сети точности, требуемой для определения координат характерных точек границ земельных участков и характерных точек контура зданий, сооружений, объектов незавершенного строительства на земельных участках;
 4. проведение на той же территории аналогичных работ иным лицом на основании ранее согласованного технического проекта.

В решении об отказе в согласовании технического проекта должны быть указаны причины отказа в согласовании и рекомендации по доработке технического проекта.

Технический проект составляется в трех экземплярах, из которых после утверждения заказчиком:

первый экземпляр остается у заказчика;

второй экземпляр разработчик технического проекта сдает в государственный фонд данных, полученных в результате проведения землеустройства;

третий экземпляр направляется разработчиком технического проекта в порядке уведомления в территориальный орган Федерального агентства геодезии и картографии.

Исходными данными для проектирования опорных межевых сетей являются сведения о:

1. наличии и состоянии пунктов государственной геодезической сети, городской геодезической сети, опорной межевой сети, а также иных геодезических сетей сгущения, развитых на соответствующей территории;
2. наличии установленных на соответствующей территории местных систем координат, характеристике качества и параметрах местных систем координат, ключах перехода от местных систем координат к государственной системе координат и каталогах координат пунктов в местных системах координат.

Указанные исходные данные предоставляются в пятидневный срок на безвозмездной основе разработчику технического проекта территориальными органами Федерального агентства геодезии и картографии, территориальными органами Федерального агентства кадастра объектов недвижимости, органами государственной власти субъектов Российской Федерации и органами местного самоуправления в пределах их компетенции.

Основанием для предоставления исходных данных для проектирования опорной межевой сети является техническое задание, предусматривающее производство соответствующих работ и являющееся приложением к заключенному контракту.

Создание опорной межевой сети осуществляется в соответствии с разработанным и утвержденным техническим проектом.

Работы по созданию опорных межевых сетей выполняют юридические лица или индивидуальные предприниматели (далее – исполнители).

В ходе создания опорной межевой сети исполнитель осуществляет внутренний контроль на всех технологических этапах. Результаты контроля отражаются в актах технического контроля.

Результатами работ по созданию опорной межевой сети являются:

1. пункты опорной межевой сети;
2. технический отчет о выполненных работах;
3. каталог координат и высот пунктов опорной межевой сети.

Приемку результатов работ осуществляет заказчик или по его поручению уполномоченная им организация. В последнем случае в контракте на производство работ между заказчиком и исполнителем оговаривается организация, которой заказчик поручает производить контроль и приемку работ.

Состав и содержание технического отчета о работах по созданию опорной межевой сети, требования к содержанию, оформлению и составлению каталога координат и высот пунктов опорной межевой сети, правила приемки результатов работ по созданию опорных межевых сетей устанавливаются Федеральным агентством кадастра объектов недвижимости.

Технический отчет и каталог координат и высот пунктов опорной межевой сети составляется в трех экземплярах, из которых после утверждения заказчиком:

первый экземпляр остается у заказчика;

второй экземпляр исполнитель сдает в территориальный орган Федерального агентства кадастра объектов недвижимости;

третий экземпляр исполнитель направляет в порядке уведомления в территориальный орган Федерального агентства геодезии и картографии.

Каталог координат и высот пунктов опорной межевой сети соответствующим органом, осуществляющим кадастровый учет и ведение государственного кадастра недвижимости, вносится в государственный кадастр недвижимости, а технический отчет помещается в государственный фонд данных, полученных в результате проведения землеустройства.

1.11. Понятие об уравнивании и оценке точности различных геодезических построений

Задача уравнивания геодезических сетей возникает только в том случае, когда в наличии имеются дополнительные (избыточные) измерения. Если в геодезической системе, имеющей t неизвестных величин, проведено t измерений, то в этом случае каждая неизвестная величина определяется однозначно, и задача уравнивания не возникает. Так, при определении планового положения знака методом прямой засечки достаточно измерить

два угла на пунктах с известными координатами. Это дает возможность однозначно, но без контроля, вычислить координаты определяемого пункта. Но обычно в геодезии в целях контроля и повышения точности выполняют дополнительные (избыточные) измерения. В этом случае появляется возможность получить искомые величины в нескольких вариантах. Возникает задача получения окончательного (результатирующего) значения определяемой величины, что и составляет содержание задачи уравнивания.

Рассмотрим решение задачи уравнивания на простейшем примере:

В треугольнике теодолитом ЗТ5КП измерены три угла, при этом получены следующие результаты:

№ углов	Значения углов	Варианты поправок в углы		
		I	II	III
1	60°00',1	-0',1	0	-35',3
2	60°00',1	-0',1	0	+30',0
3	60°00',1	-0',1	-0',3	+5',0
\sum_{np}	180°00',3	-0',3	-0',3	-0',3
$\sum_{теор}$	180°00',0			
W	+0',3			

В результате того, что все измерения сопровождаются погрешностями, фактическая сумма углов треугольника (сумма углов практическая) отличается от теоретической. Задача уравнивания заключается в том, чтобы найти такую систему поправок, которая приведет в соответствие теоретические и практические результаты.

В данном примере наиболее очевидной является система поправок (-0',1; -0',1; -0',1), которая представлена в Табл.22 виде первого варианта. Эта система ликвидирует невязку. Но она не является единственно возможной. Приемлемой может быть признана и система, представленная в варианте II (0; 0; -0',3). Она также ликвидирует невязку. Но и очевидно неприемлемая система III также ликвидирует полученную невязку. Она абсурдна, т.к. величины поправок значительно превышают возможные (предельные) ошибки для данных условий измерений.

Если рассматривать эту задачу с формальной точки зрения, то необходимо решить одно уравнение с тремя неизвестными

$$V_1 + V_2 + V_3 + W = 0,$$

где V_i – поправка в i – ый угол;

W – невязка.

С точки зрения алгебры эта задача имеет бесчисленное количество решений, но с точки зрения геодезической практики далеко не каждое решение может быть признано приемлемым.

Для решения этой задачи необходимо вводить дополнительные условия, которые позволяли бы получать единственное решение. Решением указанной задачи для обеспечений нужд астрономии и геодезии с давних времен занимались весьма уважаемые и авторитетные математики. В конечном счете, решение поставленной задачи сводится к нахождению «малых в совокупности» поправок к результатам измерений.

Первая попытка ограничить абсолютные значения поправок была выражена условием $\sum_{i=1}^n |V_i| = \min$,

т.е. стремлением минимизировать сумму модулей поправок к результатам измерений. Однако эта задача является весьма сложной, т.к. представленное ограничение является функцией, не всюду дифференцируемой, что весьма затрудняет нахождение ее минимума.

Логическим продолжением этой идеи, идеи нахождения «малых в совокупности поправок», является идея введения ограничения в виде

$$\sum_{i=1}^n V_i^2 = \min,$$

т.е. идея минимизации суммы квадратов поправок.

Первое опубликованное изложение этого метода дано в 1806 году французским математиком Анри Лежандром в связи с вычислением параметров орбит комет по данным ограниченного числа астрономических наблюдений. Ему же принадлежит и название: «метод наименьших квадратов». В своей работе Лежандр не дает каких-либо обоснований предложенному методу, кроме простоты его применения.

В 1809 году выходит работа немецкого математика Карла Фридриха Гаусса «Теория движения тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям», в которой дано, независимо от Лежандра, более полное изложение метода наименьших квадратов. В работе Гаусс отмечает, что этим методом он пользуется с 1794 года, в том числе для определения эфемерид (параметров орбиты) малой планеты Цереры. В 1801 году итальянский астроном Иосиф Пиаци открыл между орбитами Марса и Юпитера новую планету, которой было присвоено имя Церера, и провел серию наблюдений. Затем эта планета стала недоступной для наблюдений в связи с ее положением относительно Солнца. По этой, достаточно короткой, серии наблюдений Гаусс, используя метод наименьших квадратов, вычислил эфемериды Цереры. Это позволило астрономам в рассчитанное Гауссом время, в расчетной точке небесной сферы вновь отыскать эту планету. Астрономы были поражены той точностью, с которой Гаусс предсказал положение планеты.

В период с 1809 по 1821 годы Гаусс выпустил целую серию работ по методу наименьших квадратов. В частности, введя понятие веса результата измерения, Гаусс выдвигает более общее требование $[pV^2] = \min$.

В этих же работах Гауссом введен *символ суммы* $[a] = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

В 1812 году выходит работа Лапласа «Аналитическая теория вероятностей», в которой сделана серьезная попытка дать вероятностное обоснование методу наименьших квадратов.

Наиболее полное вероятностное обоснование метода наименьших квадратов в 1898 году дал русский математик академик А.А.Марков в работе «Закон больших чисел и метод наименьших квадратов».

Рассмотрим на простейшем примере реализацию принципа $[pV^2] = \min$.

Пример

Имеется ряд измерений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ одной и той же величины X , истинное значение которой не известно. Веса результатов измерений соответственно равны p_1, p_2, \dots, p_n . Требуется найти такую оценку (приближенное значение) x этой величины, которая порождает систему поправок V_1, V_2, \dots, V_n , отвечающую условию $[pV^2] = \min$.

Решение.

Поправки V_i определяются из условия

$$V_i = x - \lambda_i.$$

Тогда квадратичная форма, подлежащая минимизации, имеет вид $\Phi = [pV^2] = [p(x - \lambda)^2]$.

Для нахождения экстремума этой функции необходимо найти первую производную функции Φ по переменной x и приравнять ее к нулю.

$$\frac{d\Phi}{dx} = 2[p(x - \lambda)] = 0.$$

Решая уравнение $[p(x - \lambda)] = 0$ относительно x , находим

$$[p]x = [p\lambda],$$

и окончательно

$$x = \frac{[p\lambda]}{[p]}.$$

Важнейший результат. Принцип метода наименьших квадратов в случае неравноточных измерений одной и той же величины приводит к уже известному результату – *общей арифметической середине*.

В настоящее время существует целый комплекс программ обработки геодезических измерений, в которых реализуется принцип метода наименьших квадратов.

1.12. Современные геодезические приборы и методы определения координат точек

1.12.1. Электронные тахеометры

Тахеометр - геодезический прибор для измерения горизонтальных и вертикальных углов, расстояний и превышений (от греч. Tacheos – быстрый).

Электронные тахеометры – наиболее распространенная группа геодезических приборов. Это обусловлено тем, что они имеют самый

широкий круг областей применения: от развития ГГС и топографической съемки до инженерной геодезии и землеустройства.

Электронный тахеометр объединяет в себе возможности электронного теодолита, электронного высокоточного дальномера и полевого компьютера. Сегодня электронные тахеометры находят широкое применение в строительстве, реконструкции и архитектуре, инженерных изысканиях, наблюдениях за деформациями, землеустроительных и кадастровых работах. Использование электронных тахеометров на производстве позволяет значительно повысить производительность работ, сократить время на камеральную обработку и упростить обработку полевых данных, исключить ошибки исполнителя (взятия отсчета, записи измерений, ручных вычислений), исключить применение калькуляторов для расчетов (например, при выносе точек, вычислении координат, при выполнении обратной засечки и других задачах). Появление безотражательных моделей тахеометров позволило проводить измерения там, где ранее это считалось невозможным или опасным. Современные электронные тахеометры – это высокая надежность конструкции, защита от воздействия воды и пыли, широкий набор прикладных программ и удобное управление. Электронные тахеометры успешно работают в различных погодных и климатических условиях, а для суровых условий севера специально разработаны низкотемпературные модели.

Тахеометры предназначены для тахеометрической съемки с целью получения плана с изображением ситуации и рельефа. Тахеометры позволяют определять расстояния, высоту недоступного объекта, осуществлять измерения относительно базовой линии, определять координаты, выполнять обратную засечку. Электронные тахеометры - это совершенные приборы для выполнения широкого круга геодезических работ.

Тахеометры - наиболее интеллектуальные приборы, оснащенные большой внутренней памятью, позволяющей надежно хранить данные съемки. На некоторых моделях электронных тахеометров возможна загрузка координат из персонального компьютера для последующего выноса в натуру. Наличие экранов и буквенно-цифровых клавиатур электронных тахеометров облегчает управление прибором.

Технические характеристики наиболее распространенных тахеометров приведены в Приложении 1

1.13.2. Спутниковые геодезические измерения

1.13.2.1. Основы электронной дальнометрии

Измерение дальности электронными средствами аппаратуры пользователя (спутниковыми приёмниками) производится сравнением фазы несущего колебания принимаемого сигнала с фазой опорного, масштабного колебания, формируемого эталонным генератором, входящим в состав аппаратуры пользователя.

Электромагнитное колебание, излучаемое спутниковым передатчиком, представим в виде:

$$S(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi),$$

где A – амплитуда сигнала;

f – частота (циклическая) колебаний;

φ – фаза сигнала в момент начала отсчёта времени ($t=0$).

Текущая фаза сигнала в произвольный момент t равна $(2\pi f t + \varphi)$. Если излучаемый сигнал и сигнал опорного генератора имеют одинаковую частоту и синхронны, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, то для принимаемого сигнала относительно опорного наблюдается сдвиг фазы, характеризующий задержку сигнала на время t_p , необходимое для прохождения сигналом (электромагнитной волны) расстояния по линии космический аппарат (КА) – потребитель (рис.1.24). На рис. 1.24 видно, что однозначные измерения разности фаз (интервала t_p) можно выполнить только в пределах одного периода высокочастотных колебаний. По расстоянию это соответствует одной длине волны электромагнитного колебания с заданной частотой. Например, при частоте несущего колебания $f \approx 1600$ МГц длина волны составит: $\lambda = C / f \approx 18,75$ см (C – скорость света в вакууме).

1 – опорный сигнал;

1 – опорный сигнал

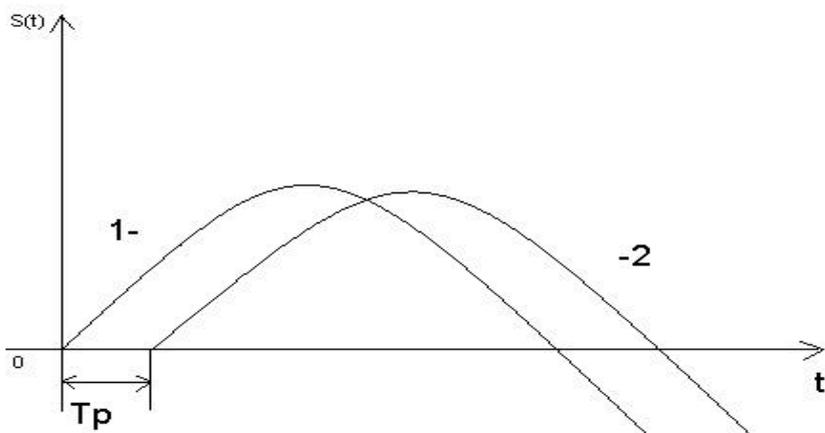


Рис.1

2 – принимаемый сигнал

t_p – время задержки принимаемого сигнала относительно опорного.

Рис.1.26 Сдвиг фаз принимаемого сигнала относительно опорного

Отсюда следует, что при измерении дальности на несущей частоте навигационного сигнала в погрешность измерений войдёт неизвестное число длин волн, укладывающихся на линии КА – пользователь.

Таким образом, неопределённость измеряемой дальности, зависящая от начальной неопределённости, положения потребителя в пространстве значительно превышает величину λ .

Если задать начальную неопределённость положения потребителя относительно излучателя по любой из координат, равной 100 м, то минимальная частота радиосигнала (для однозначного измерения сигнала) должна составить : $f = C/100\text{км} = 3 \text{ кГц}$ (C – скорость света в вакууме), с периодом $T = 1/f = 0,333 \text{ мсек}$.

При инструментальной погрешности измерения разности фаз двух сигналов равной $\delta T \approx 0,01$ периода сигнала, погрешность измерения дальности составит $m_R = C \cdot \delta T \approx 1 \text{ км}$.

Поскольку полученная величина инструментальной ошибки слишком велика, строить определение дальности с использованием фазовых измерений, позволяющих раскрыть неоднозначность, невозможно.

В конце прошлого столетия для спутниковой дальнометрии стали применяться методы измерений с использованием специальных кодов, формируемых по сложным законам, получивших название: «шумоподобных» или «псевдошумовых».

Шумоподобные сигналы формируются с помощью специальных генераторов на, так называемых, регистрах сдвига с обратными связями.

Шумоподобный сигнал представляет собой периодически повторяющуюся последовательность нулей и единиц в которой невозможно заметить какой-либо закономерности смены символов (нулей и единиц), т.е.

формирование последовательности осуществляется как бы по случайному или шумовому закону. Отсюда возникло название данного вида сигналов.

Однако, через определённое число символов, зависящее от числа разрядов в сдвиговом регистре, последовательность повторяется с точностью до каждого символа.

Измерение дальности (псевдодальность в системах GPS, ГЛОНАСС) производится, как показано ранее, сравниваем фаз излучённого сигнала с фазой местного опорного сигнала, генерируемого в приёмнике пользователя. В данном случае вместо фаз синусоидальных сигналов производится сравнение фаз псевдослучайных последовательностей.

Выбранная псевдослучайная последовательность нулей и единиц определяется двумя параметрами:

- 1) $T_n = M \cdot \tau_n$ – величиной априорной неопределённости дальности, которую необходимо измерить и на основании которой устанавливается период повторения последовательности, где M – число символов последовательности;
- 2) τ_n – период чередования импульсов последовательности, выбираемый, исходя из требуемой точности измерения

При установлении параметров возникают сложности в связи с тем, что при заданной неопределённости и установленном периоде повторения невозможно до бесконечности уменьшать период чередования импульсов с целью увеличения точности измерения. Причиной этого является соответствующий рост времени, требуемого для приёма псевдошумового сигнала.

Генератор псевдошумового дальномерного кода системы ГЛОНАСС имеет 9 разрядов, следовательно, число символов последовательности – M составит $M = 2^9 - 1 = 511$. Смена символов осуществляется с частотой $f_r = 511 \text{ кГц}$, длительность импульса $\tau_u = 1/f_r = (1/511) \cdot 10^{-3} \text{ сек} \approx 2 \text{ мсек}$.

Инструментальная погрешность измерения в этом случае не превысит $\delta_R \approx C\tau_u \approx 6 \text{ м}$.

Период последовательности $T_n = M\tau_u = 511(1/f_r) = 1 \text{ мсек}$.

Неоднозначность измерения псевдодальности равна: $R_H = CT_n \approx 300 \text{ м}$ $R_H = C \cdot T_n \approx 300 \text{ км}$.

Такая величина неоднозначности является вполне приемлемой, поскольку расстояние до КА априори может быть известно по эфемеридным данным с большей точностью.

В системе GPS псевдошумовой дальномерный код формируется по более сложной схеме, поскольку вид дальномерного кода свой для каждого спутника системы. Т.е. схема генератора дальномерных кодов GPS способна формировать большое число кодов, из которых выбирается минимальное количество для 24 спутников системы так, чтобы мешающее влияние каждого спутника по отношению к другим было минимальным. Такая система формирования дальномерного кода объясняется тем, что в системе

GPS принято кодовое разделение сигналов, а в системе ГЛОНАСС – частотное, т.е. в системе ГЛОНАСС каждый спутник излучает сигнал на своей частоте, а дальномерный код имеет одну и ту же структуру. В системе GPS все КА излучают навигационный сигнал на одной частоте 1545,42МГц, а вид дальномерного кода у каждого спутника свой.

В генераторе псевдошумовых кодов системы GPS содержится 10 разрядов, т.е. число символов последовательности, $M = 2^{10} - 1 = 1023$. Смена символов осуществляется с тактовой частотой $f_r = 1023$ МГц, длительность одного символа $\tau_u = 1$ мксек, а длительность последовательности $T_n = M\tau_u = 1$ мсек.

Дальномерные сигналы, предназначенные для военных пользователей, представляют собой также псевдослучайные последовательности. С целью повышения точности измерения псевдодальности, тактовая частота, смена символов в десять раз выше чем в сигналах для гражданских пользователей. Для военных пользователей сигнала формируется псевдослучайная последовательность сверхбольшой длительности. В системе GPS тактовая частота $f_T = 1,023$ МГц, длительность псевдослучайной последовательности составит 7 суток для каждого ИСЗ.

Сигнал псевдошумового дальномерного кода необходимо встроить в излучаемое передатчиком ИСЗ электромагнитное колебание высокой частоты $f_{изл} \approx 1600$ МГц, которое называется несущей частотой. Дополнительно в несущий высокочастотный сигнал необходимо также встроить передаваемое навигационное сообщение, метки времени и другую полезную информацию. Встроить передаваемую информацию, как известно, можно с помощью изменения или модуляции параметров несущего высокочастотного сигнала.

В системах GPS и ГЛОНАСС передача информации осуществляется посредством, так называемой, фазовой модуляции несущего сигнала.

Модуляция дополнительным кодом осуществляется посредством изменения фазы несущего колебания на 180^0 при каждом переходе чередования символов псевдослучайного сигнала от 0 к 1 или от 1 к 0.

Для сигнала псевдослучайного последовательности импульсов (рис.1.25) моментами изменения фазы несущей частоты будут: t_1, t_2, \dots, t_6

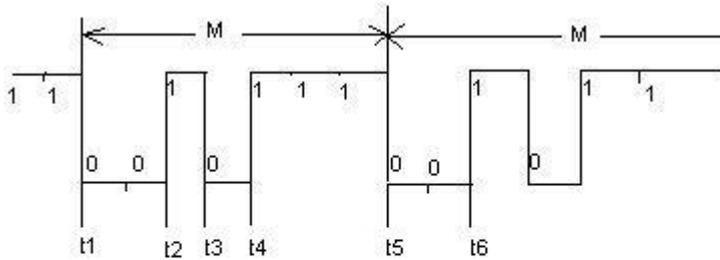


Рис. 2

Рис. 1.27. Вид псевдслучайной последовательности импульсов

Длина волны несущей значительно меньше расстояния, которое приходит электромагнитная волна за время τ_u .

Для L_1 и L_2 она составляет соответственно 19 см. и 24 см. Если точность измерения соответствует $1 \div 2\%$ от длины волны, то измерения фазы несущей позволяет существенно повысить точность результата по сравнению с C/A и P(Y) кодовыми измерениями.

Фазовые измерения с привлечением несущей естественно сопровождаются необходимостью разрешения неоднозначности. Как таковое фазовое измерение включает определение разности фаз 2-х сигналов в пределах от 0 до 360^0 . Это измерение (результат) называют дробной фазой, оно является исходным для высокоточных геодезических GPS измерений и для точных измерений в режиме кинематики.

В приёмнике пользователя поддерживается слежение за измерением целого числа длин волн несущей в результате чего происходит наблюдение (измерение) непрерывно изменяющейся фазы:

$$\Phi_A^i(T_A) = \Delta\Phi_A^j(T_A) + [C_R^i(T_A) + C_{R0}^i]$$

где $\Delta\Phi_A^j(T_A)$ – дробная фаза, полученная из наблюдений,

$C_R(T_A)$ – текущий счёт целого числа длин волн по «счётчику» перехода фазы через 0 , регистрирующему целое число циклов с момента «захвата» наблюдаемого ИСЗ.

C_{R0}^i – начальный отсчёт по счётчику (обычно не известен и устанавливается равным нулю); выражение в квадратных скобках является целым числом, нижний индекс (A) относится к пункту (приёмнику); верхний индекс (j) – к спутнику;

T_A – время наблюдения.

Расстояние до ИСЗ вычисляют по формуле:

$$\rho_A^j(T_A) = C \left[\Phi_A^j(T_A) + N_A^j + v(T_A) \right] / f,$$

где N_A^j – целая неоднозначность;

$v(T_A)$ – совокупность поправок, учитываемых при обработке результатов измерений.

Величина N_A^j – - постоянная во времени величина для каждой отдельной пары – «приёмник – спутник».

Если N_A^j – определить, то полученное расстояние, т.н. «расстояние по несущей» будет очень точным. Определение начальной величины неоднозначности и является проблемой разрешения неоднозначности фазовых измерений. В настоящее время она решена в существующих методиках применения GPS-ГЛОНАСС технологий для решения геодезических задач.

1.13.2.2. Глобальные спутниковые системы

Появление искусственных спутников Земли (ИСЗ) позволило значительно повысить точность определения местоположения точек и объектов на земной поверхности. Спутниковые методы нашли широкое применение в геодезии, городском и земельном кадастре, при инвентаризации земель, строительстве инженерных сооружений, в геологии и т.д.

К первому поколению спутниковых систем позиционирования относят созданные в конце 60-х годов XX века т.н. доплеровские системы «Цикада» (СССР) и «Transit» (США). Для этих систем характерными особенностями были низкие орбиты ИСЗ и использование для измерений навигационных параметров объекта сигнала одного (видимого в данный момент) спутника. Координаты объектов на земной поверхности рассчитывались с точностью 50-100 метров на основе приема и выделения доплеровского сдвига частоты передатчика одного из 6-7 ИСЗ, находившегося в поле видимости около 30-40 минут. Существенными недостатками этих систем были низкая точность и малая оперативность, т.к. перерывы между прохождениями спутников достигали 1,5 часа. В связи с этим возникла необходимость разработки систем второго поколения – глобальных спутниковых систем.

В настоящее время в мире существуют три глобальные системы: ГЛОНАСС (Россия), GPS или Navstar (США) и Galileo (Европейский союз).

ГЛОНАСС – Глобальная Навигационная Спутниковая Система принята в эксплуатацию Министерством обороны России в 1993 году. В связи с отсутствием финансирования система пришла в упадок, однако в настоящее время ведется активная работа по ее восстановлению. На февраль 2008 года приемники регистрируют сигналы от 18 спутников ГЛОНАСС (должно быть 24 функционирующих ИСЗ).

GPS (Global Positioning System) – глобальная система позиционирования передана в эксплуатацию Министерства обороны США в 1995 году (запуск первых спутников сделан в 1978 году). Система состоит из 24 основных ИСЗ, и до 2000 года функционировала в двух режимах: для гражданского пользования - в режиме пониженной точности и для военных (санкционированных) пользователей - в режиме высокой точности. В

настоящее время это ограничение снято, т.о. система GPS доступна для всего мира в режиме высокой точности.

В 1999 году решением Европейского космического агентства начаты работы по созданию спутниковой системы Galileo, которая будет включать 30 спутников (из них 3 резервных).

Глобальные спутниковые системы состоят из трех секторов (сегментов) (рис. 1.28): космического сектора, наземного сектора управления и контроля и сектора пользователя.

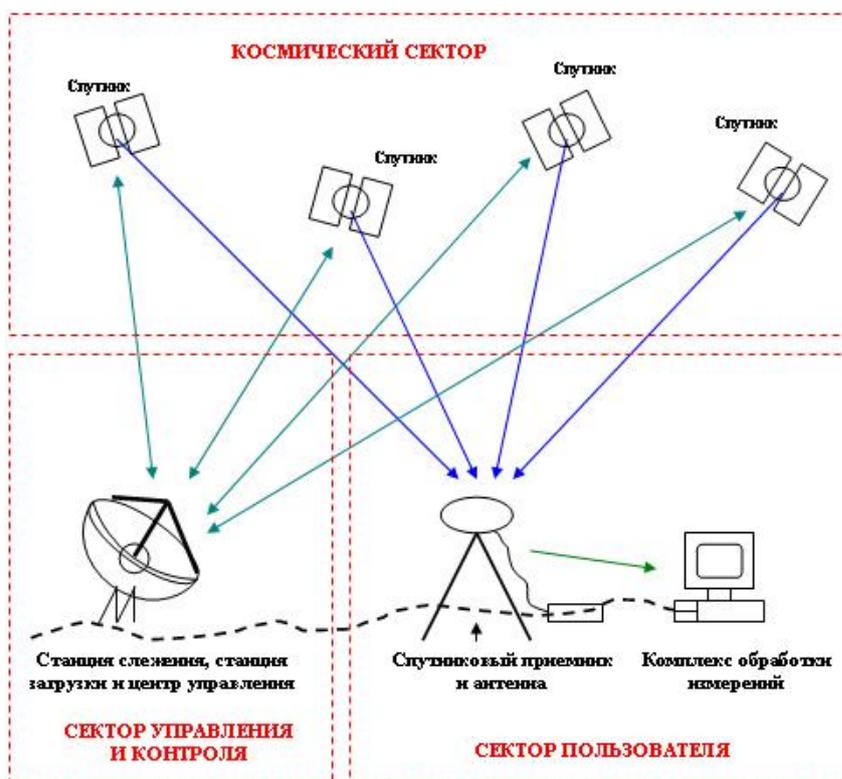


Рис. 1.28. Структура глобальной спутниковой системы

Космический сектор – совокупность (орбитальная группировка) входящих с систему спутников (рис. 1.29), вращающихся вокруг Земли на определенных орбитах.



Рис. 1.29. Искусственный спутник Земли системы GPS

Размеры и форма эллиптической орбиты определяются размерами ее большой a и малой b полуосей и эксцентриситетом e , которые связаны математическим выражением:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Положение плоскости орбиты относительно экваториальной плоскости характеризуют следующие величины, т.н. элементы орбиты: долгота восходящего узла Ω , аргумент перигея ω и угол i наклона плоскости орбиты к плоскости экватора (рис. 1.30).

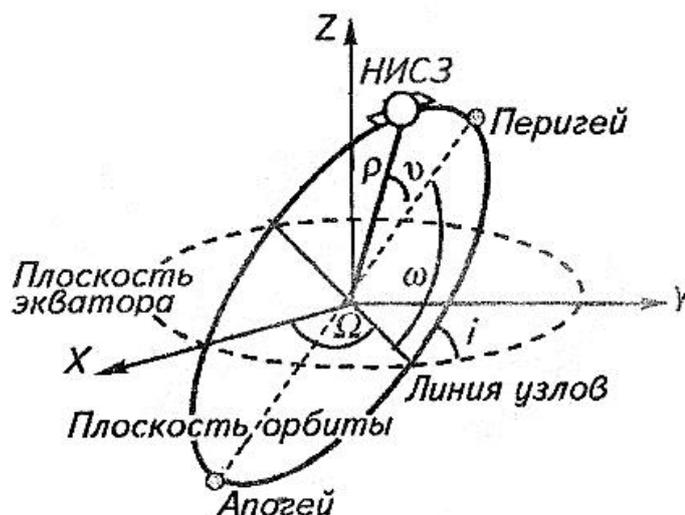


Рис. 1.30. Основные элементы орбиты ИСЗ

Положение ИСЗ на орбите описывает радиус-вектор ρ , составляющий с линией, соединяющей апогей и перигей, угол ν . Радиус-вектор определяют по формуле:

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1+e \cdot \cos \nu)},$$

где ν – истинная аномалия, которая задает положение спутника на орбите на определенную эпоху (выражается в градусной мере).

Пространственные инерциальные геоцентрические прямоугольные координаты x_c, y_c, z_c спутника определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x_c &= \rho(\cos \Omega \cos(\omega + \nu) - \sin \Omega \sin(\omega + \nu) \cos i); \\ y_c &= \rho(\sin \Omega \cos(\omega + \nu) + \cos \Omega \sin(\omega + \nu) \cos i); \\ z_c &= \rho \sin(\omega + \nu) \sin i. \end{aligned}$$

Здесь положение ИСЗ задано в т.н. инерциальных координатах, которые не связаны с вращающейся Землей, поскольку ось x направлена в точку весны γ , ось z - в полюс мира P , а ось y дополняет систему до правой.

При невозмущенном движении ИСЗ все элементы орбиты Ω, i, ω, a и e при движении спутника по орбите остаются постоянными, шестым элементом является τ – время прохождения ИСЗ точки перигея.

Согласно проекту в системе ГЛОНАСС на трех круговых орбитах, долготы восхождения узлов которых различаются на 120° (высота орбиты 19100 км, наклон орбиты $64,8^\circ$, период обращения – примерно 12 часов) должны вращаться 24 ИСЗ, т.е. по 8 ИСЗ на каждой орбите (рис. 1.31).

В GPS ИСЗ размещены на круговых орбитах в шести орбитальных плоскостях по четыре спутника в каждой (рис. 1.31). Высота орбиты 20145 км, восходящие узлы орбит отстоят друг от друга по долготе на 60° .

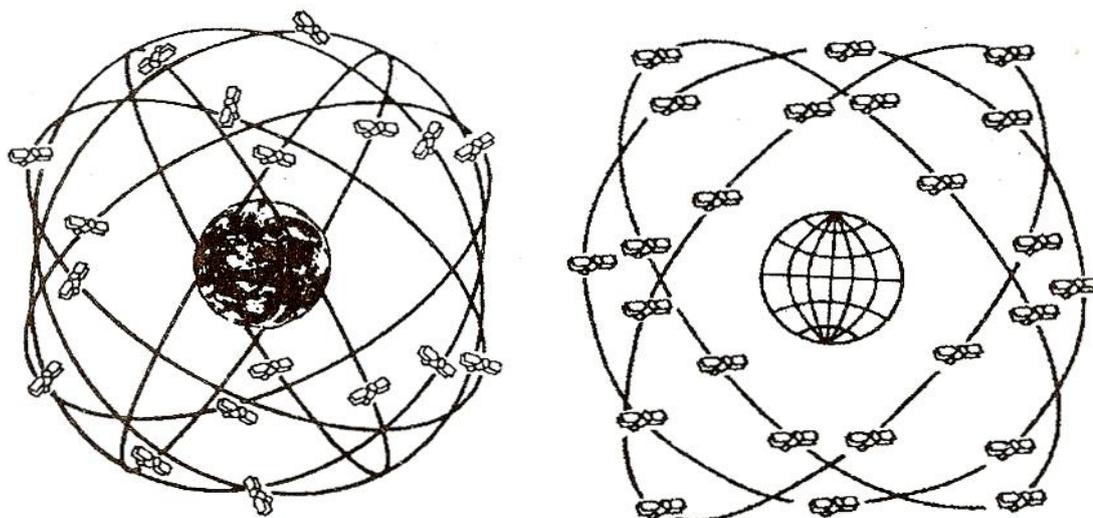


Рис. 1.31. Созвездие ИСЗ систем GPS и ГЛОНАСС

Пространственное положение ИСЗ закладывается в его бортовые эфемериды, которые вырабатываются *Сектором управления и контроля* (рис 1.28). Функционирование Сектора управления и контроля обеспечивается работой: станций слежения, службы точного времени, главной станции с вычислительным центром и станции загрузки информации на спутники. По результатам измерений бортовые эфемериды, содержащие пространственные прямоугольные координаты на определенную эпоху t_k , загружаются на ИСЗ раз в сутки. Влияние ошибок определения параметров орбит, непрогнозируемых возмущений движения ИСЗ и других факторов на точность определения координат пунктов не превышает для ГЛОНАСС и GPS – нескольких метров (при т.н. абсолютных определениях координат).

В ГНСС используют различные системы и шкалы времени: всемирное (гринвичское среднее солнечное); всемирное координированное; поясное; местное декретное и летнее.

Всемирное время UT измеряют часовым углом среднего экваториального Солнца на Гринвиче, увеличенным на 12 часов. Временная шкала UT задается осевым вращением Земли, она неравномерна, поскольку угловая скорость вращения Земли по ряду причин непостоянна.

Шкала Всемирного координированного времени UTC задается атомным стандартом частоты (т.н. атомными часами), это равномерная шкала времени. Шкала UTC «привязана» к шкале астрономического времени UT, она распространяется радиовещательными каналами и используется в повседневной жизни.

Поясным временем ZT называется местное среднее время осевого географического меридиана, заданного часового пояса, значение ZT вычисляют по формуле:

$$ZT = UT + \Delta n,$$

где Δn – номер часового пояса.

Местное декретное время отличается от поясного времени на декретную добавку $\Delta t_{\text{декр}}$, устанавливаемую для каждого региона законодательным порядком.

В GPS используют шкалу времени, привязанную к шкале UTC, при этом в системе имеется свой недельный календарь, в котором номер недели отсчитывается с ночи 5-ого на 6-е января 1980 г. Шкала времени ГЛОНАСС привязана к шкале Государственного эталона частоты и времени России, что позволяет выполнять обработку совместных GPS-ГЛОНАСС измерений в единой шкале времени.

Принцип определения местоположения с помощью спутниковых систем основан на измерении расстояний между спутником и фазовым центром антенны приемника, установленного на определяемой точке. Каждый навигационный спутник излучает систему радиосигналов (рис. 1.32).

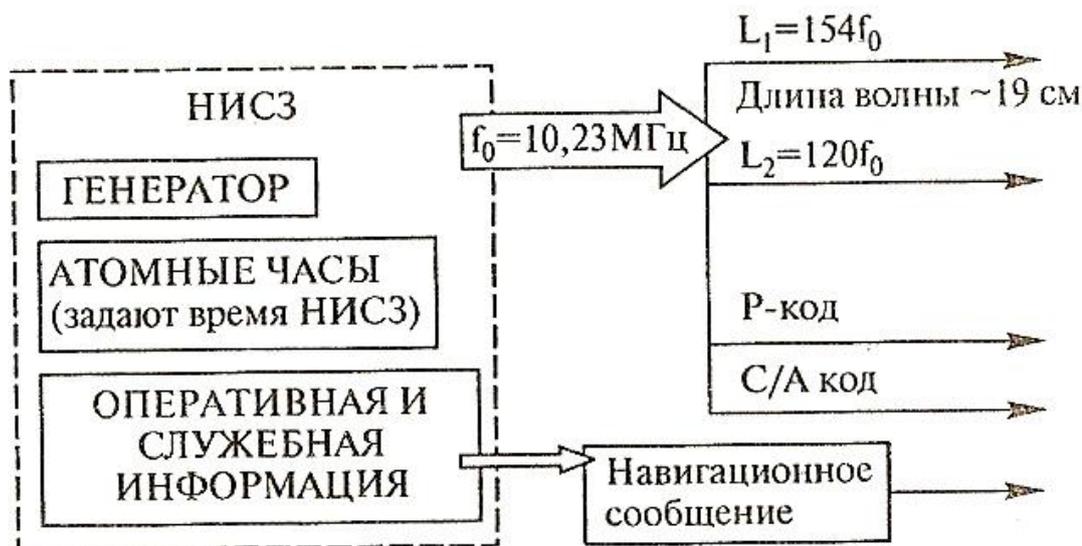


Рис. 1.32. Структура радиосигнала системы GPS

Система радиосигналов содержит псевдослучайную последовательность и навигационное сообщение, передаваемые на несущей частоте f_0 .

В радиолинии частотного диапазона L_1 спутники GPS одновременно излучают кодовые последовательности стандартной (*P-код*) и высокой (*C/A-код*) точности; кроме того излучается несущий электромагнитный сигнал частотой L_2 . Все спутники работают на одних и тех же частотах, но каждый имеет свой код.

В ГЛОНАСС каждый спутник работает на собственной частоте, разделение сигналов частотное. Несущие сигналы обозначают как L_1 и L_2 , используются *ВТ-код* (код высокой точности) и *СТ-код* (код стандартной точности).

Навигационные сообщения, содержат эфемериды ИСЗ; метку времени; сдвиг шкалы времени ИСЗ относительно шкалы времени всей системы; альманах системы, содержащий параметры орбит всех спутников системы и другие сведения. Навигационное сообщение передается в течение ~ 15 минут.

Сектор пользователя (потребителя) включает в себя спутниковые приемники, число которых не ограничено, а также ПЭВМ и программный комплекс для камеральной обработки измерений.

Приемник (рис. 1.33) выполняет функции супергетеродинного приемника и производит первичную обработку сигналов. После завершения поиска происходит захват сигнала, который поступает в вычислительный блок.



Рис. 1.33. Структурная схема приемника спутниковых сигналов

В приемниках геодезического класса есть многоканальный блок, следящий одновременно за сигналами нескольких ИСЗ; приемники оснащены портами для интеграции с другой аппаратурой. Приемники генерируют местную шкалу времени; осуществляют поиск, усиление и разделение сигналов, принадлежащих различным ИСЗ; фильтруют сигналы; выделяют из сигналов метки времени и псевдослучайные последовательности; следят за частотой, фазой, кодовыми сигналами, измеряют псевдодальности до каждого ИСЗ; принимают установочные параметры и маркеры, фиксирующие внешние события; выполняют различные оперативные расчеты; выдают в форме индикации соответствующую информацию об установочных указаниях и параметрах и результаты измерений и др. Кроме того, приемники осуществляют прием поправок в псевдодальности от внешнего передающего устройства; передачу результатов спутниковых наблюдений на другие радиоприемные устройства. Конструктивно приемники исполнены в виде отдельных или совмещенных блоков, которые содержат собственно приемник, антенное устройство, контроллер и аккумуляторы. Приемники могут иметь встроенный радиомодем для передачи в реальном времени необходимой информации.

Основными производителями спутниковых геодезических систем являются - фирмы Trimble Navigations (США), Leica (Швейцария), Topcon

(Япония), Sokkia (Япония), Thales Navigation (Франция), ЭОМЗ НИИКП (Россия) и др. Последние модели спутниковой аппаратуры и их технические характеристики даны в Приложении.

Основные принципы определения местоположения точек и линий на земной поверхности с применением спутниковых систем

В спутниковых системах ИСЗ используются в качестве носителей координат, т.е. опорных геодезических пунктов с известными на момент наблюдения инерциональными координатами. Приемники потребителя измеряют дальности до ИСЗ и скорости изменения дальностей, относительно точки наблюдения на земной поверхности. Измеренным скоростям соответствуют поверхности положения в виде конуса, а измеренным дальностям – сферические поверхности. В геодезических целях пользуются дальностями, по которым реализуют т.н. пространственные линейные засечки. Если с определяемого пункта A измерить расстояния до трех пунктов с известными координатами и провести из них как из центров с радиусами, равными измеренным расстояниям, сферы, то эти сферы пересекутся в определяемой точке A и в некоторой точке A' . Если известны координаты ИСЗ, задача вычисления координат точки A решается аналитически однозначно

Дальности определяются по времени распространения радиоволны от передатчика на спутнике до приемника на Земле, при этом используются два способа измерения – фазовый и кодовый. Измерения выполняются в беззапросном режиме, т.е. передатчики на спутнике работают непрерывно, приемник же включается по мере надобности. В этом режиме для безошибочного определения времени распространения радиоволны, шкалы времени на спутнике и в приемнике должны быть строго синхронизованы, что практически невыполнимо. Вследствие этого измеряются т.н. псевдодальности, которые отличаются от истинных дальностей на величину, пропорциональную рассинхронизации шкал времени спутника и приемника. Если измерения по всем каналам приемника, принимающего сигналы от разных спутников производятся одновременно, то отличие псевдодальности от дальности до любого спутника будет одинаковым. Это отличие определяется и исключается после введения его в качестве дополнительного неизвестного в систему уравнений местоопределения. Поэтому для вычисления координат пунктов по измеренным псевдодальностям, необходимо измерять псевдодальности минимум до четырех ИСЗ, поскольку неизвестными будут три координаты (X, Y и Z) пункта и $\Delta t - j_{ib}, r_f$ cby[hjybpfwbb/

На рис. 1.34 представлено одно из возможных положений ИСЗ в момент проведения спутниковых наблюдений из точки P . Положение ИСЗ считается в зоне видимости, если угол β с вершиной в определяемом пункте и составленный направлениями на спутник и на начало геоцентрической

системы координат больше чем $90^\circ + \gamma$, т.е. $\beta > 90^\circ + \gamma$, где γ – угол отсечки (как правило, $\gamma \geq 15^\circ$). Количество спутников в системах GPS и ГЛОНАСС и параметры их орбит обеспечивают наличие в каждой точке земной поверхности одновременную «радиовидимость» не менее четырех НИСЗ.

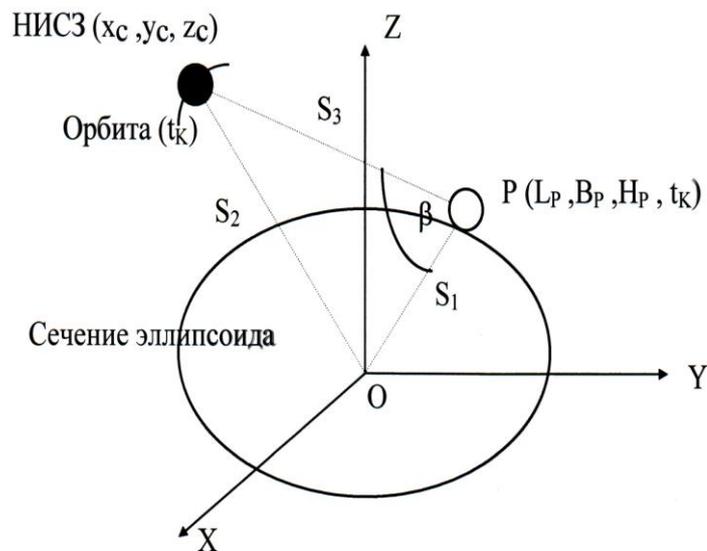


Рис 1.34. Взаимное расположение пункта и НИСЗ

Определение расстояний до спутников осуществляется по измерениям интервалов времени между моментом излучения и моментом приема сигнала. Моменты должны определяться синхронизованными часами, расположенными на спутнике и на приемнике. Скорость v радиоволны составляет около 300000 км/с, поэтому для обеспечения достаточной точности измерений расстояний необходимо измерять момент с точностью 10^{-10} - 10^{-12} с. Главной трудностью при измерении времени распространения радиосигнала является точное выделение момента, в который сигнал передан со спутника. Для выделения момента по возможности точно синхронизируют опорные генераторы спутника и приемника.

Задача определения пространственного положения точки относительно созвездия ИСЗ получила название пространственной линейной засечки (рис. 1.35). В этой задаче исходными данными являются: пространственные прямоугольных координаты $X_1, Y_1, Z_1, \dots, X_4, Y_4, Z_4$ как минимум четырех ИСЗ; результаты синхронных спутниковых измерений расстояний S_1, \dots, S_4 между фазовым центром антенны на определяемой точке и соответствующим ИСЗ.

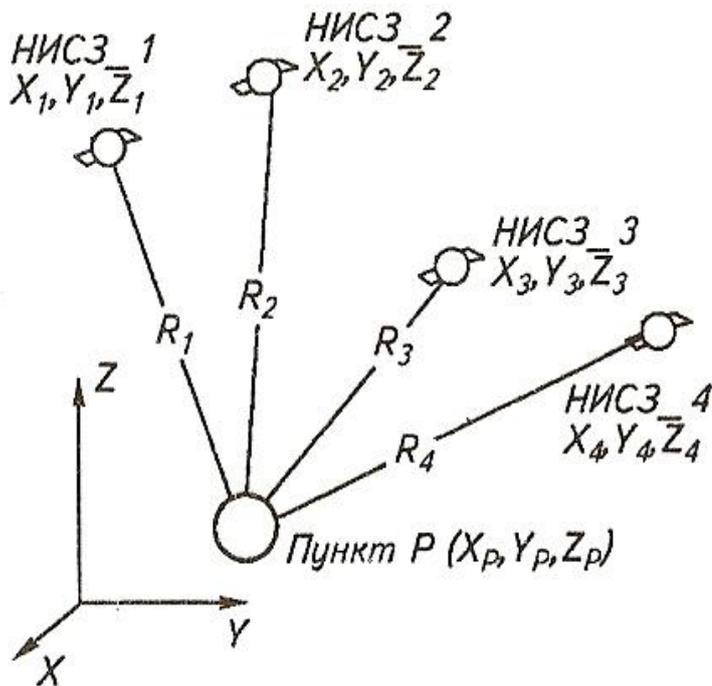


Рис. 1.35. Пространственная линейная засечка

Из рис. 1.35 следует, что

$$\begin{aligned}
 S_{1-P}^2 &= \Delta X_{1-P}^2 + \Delta Y_{1-P}^2 + \Delta Z_{1-P}^2; \\
 S_{2-P}^2 &= \Delta X_{2-P}^2 + \Delta Y_{2-P}^2 + \Delta Z_{2-P}^2; \\
 S_{3-P}^2 &= \Delta X_{3-P}^2 + \Delta Y_{3-P}^2 + \Delta Z_{3-P}^2.
 \end{aligned}$$

где ΔX_{i-P} , ΔY_{i-P} , ΔZ_{i-P} - приращения координат i -го ($i=1, \dots, 3$) спутника и приемника и приемника, установленного на точке P ;

S_{i-P} – расстояние до ИСЗ

Таким образом, имеем систему уравнений, в которой число уравнений и число неизвестных (пространственные прямоугольные координаты определяемого пункта) равны между собой (три уравнения с тремя неизвестными). Решая данную систему, можно определить абсолютное положение пункта.

На практике пространственную линейную засечку реализуют, измеряя не расстояния (дальности) до ИСЗ, а т.н. псевдодальности, которые отличаются от дальностей на некоторую неизвестную, но постоянную на данный момент величину ΔD , обусловленную расхождением шкал времени ИСЗ и приемника. Т.е., при измерении абсолютного положения число неизвестных будет не три, а четыре. Отсюда следует, что для установления абсолютного положения пунктов на земной поверхности необходимо провести соответствующие наблюдения до четырех ИСЗ. В этом случае уравнения имеют вид:

$$S_{1-P} = \sqrt{\Delta X_{1-P}^2 + \Delta Y_{1-P}^2 + \Delta Z_{1-P}^2} + \Delta tV;$$

$$S_{2-p} = \sqrt{\Delta X_{2-p}^2 + \Delta Y_{2-p}^2 + \Delta Z_{2-p}^2} + \Delta tV;$$

$$S_{3-p} = \sqrt{\Delta X_{3-p}^2 + \Delta Y_{3-p}^2 + \Delta Z_{3-p}^2} + \Delta tV;$$

где Δt – погрешность синхронизации шкал.

В глобальных спутниковых системах строгая синхронизация шкал времени выполняется только в части, относящейся к навигационным спутникам, где бортовые шкалы времени, формирующиеся бортовыми (атомными) эталонами частоты, синхронизированы с точностью до десятков наносекунд с системной шкалой времени (СШВ), вырабатываемой в системах контроля и управления, где предусмотрена соответствующая сверка этих шкал. Шкала времени в приемниках вырабатывается опорным генератором и формируется автономно. Т.е., шкала времени приемника имеет случайное начальное расхождение с системной шкалой времени, также имеет место последующий уход шкалы приемника в процессе измерений относительно бортовой, а следовательно, и системной шкал времени. При этом разность между приемом метки времени, отсчитанной по шкале времени приемника, и моментом ее излучения по системной шкале дает совокупное значение времени распространения сигнала и расхождения шкалы времени приемника со шкалой системного времени на момент измерения (рис. 1.36).

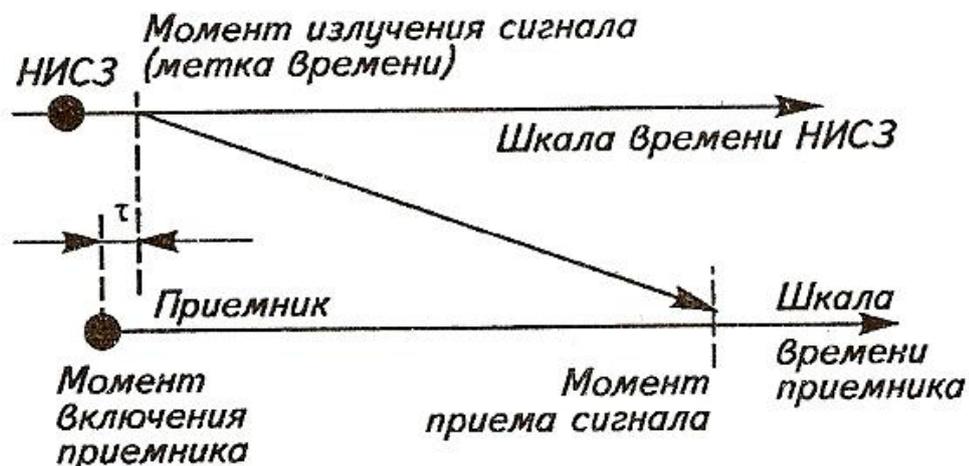


Рис. 1.36. К понятию псевдодалности

Т.о., псевдодалностью ρ_{ij} между j -м приемником и i -м ИСЗ называют величину

$$\rho_{ij} = C \cdot \tau_{ij},$$

где C – скорость распространения сигнала от ИСЗ до приемника; τ_{ij} – временной интервал между моментом излучения сигнала, определяемый в

системной шкале времени, и моментом его приема, отсчитанным в бортовой шкале времени приемника.

Псевдодальность ρ отличается от истинной дальности D на величину $\Delta D_{ij} = C\tau$, где τ - соответствующее расхождение шкал времени.

Если приемник работает на нескольких каналах, т.е. принимает сигналы от нескольких ИСЗ одновременно, то составляющая псевдодальности ΔD будет одинаковой для всех каналов, а разность псевдодальностей, полученных в любой паре каналов приемника (от любой пары ИСЗ), - равна разности истинных дальностей от приемника до соответствующих ИСЗ на момент приема сигналов.

Точность определения положения с помощью пространственной линейной засечки зависит как от точности измерения соответствующих расстояний, так и от геометрии засечки, т.е. от геометрического фактора ($G\Phi$) – отношения СКП определения местоположения M_t и измерения псевдодальностей m_R между ИСЗ и определяемой точкой на земной поверхности, т.е. $G\Phi = \frac{M_t}{m_R}$.

Различают: $G\Phi$, характеризующий суммарное влияние геометрии построения на точность определения планового положения пункта $G\Phi_H$; $G\Phi$, характеризующий суммарное влияние геометрии построения на точность определения абсциссы пункта – $G\Phi_X$; аналогично – $G\Phi_Y$; и $G\Phi_V$ – по высоте. Применительно к GPS понятию $G\Phi$ соответствует понятие ухудшение точности – DOP. При этом, $G\Phi_H$ соответствует HDOP, а $G\Phi_V$ – VDOP. $G\Phi$, определяющий точность пространственного положения пункта называют PDOP.

Помимо геометрического фактора точность определения положения также зависит от влияния приборных погрешностей, от погрешностей обусловленных влиянием внешней среды, от погрешностей эфемерид ИСЗ, а также от точности моделей, используемых при обработке результатов спутниковых наблюдений (математических, физических, геофизических и т.п.).

Появление в результатах измерений приборных погрешностей обусловлено многими факторами, в том числе – влиянием задержек сигнала в электронных цепях и блоках спутников и приемниках, а точнее говоря изменением этих задержек во времени. Но основным из приборных факторов является нестабильность стандартов частоты (генераторов), установленных в приемниках.

При учете влияния внешней среды атмосферу условно разделяют на слои: тропосфера, стратосфера и ионосфера. Ионосфера вносит наибольший вклад в задержку распространения радиоволн дециметрового диапазона, используемого в GPS. Радикальный способ учета этой задержки – дисперсионный способ при спутниковых наблюдениях на двух несущих частотах. Если наблюдения ведутся на одной частоте, то при обработке их результатов используют информацию о соответствующих коэффициентах

модели ионосферы содержащуюся в навигационном сообщении. Эта информация достаточно груба и не позволяет с высокой точностью определить длину базовой линии более двух десятков километров. Опыт показывает, что при спутниковых наблюдениях днем в средних широтах в течение двух часов данную погрешность можно свести к $1-2 \cdot 10^{-6}$ длины базовой линии. При работе в ночное время влияние ионосферы уменьшается и составляет примерно $1 \cdot 10^{-6}$ длины базовой линии.

Влияние отражения радиоволн (явления многопутности электромагнитной волны) обусловлено отражением радиоволн от подстилающей поверхности и окружающих предметов. Данная погрешность не может быть предсчитана и зависит от свойств подстилающей поверхности, окружающей ситуации, высоты антенны приемника спутниковых сигналов и ее конструкции. Опыт показывает, что соответствующая погрешность в длине базовой линии при неблагоприятных условиях может достигать нескольких сантиметров. Для ослабления влияния этого источника используют специальные экранированные антенны.

Относительная погрешность длины базовой линии, вызванная влиянием погрешностей эфемерид ИСЗ примерно равна отношению ошибки месторасположения ИСЗ на орбите к ее высоте, что примерно составляет $5 \cdot 10^{-6}$.

Для определения пространственного положения точек в геоцентрической системе координат необходимо иметь элементы спутниковых орбит в этой же системе. Погрешности эфемерид ИСЗ могут быть значительными, но их влияние уменьшается путем осреднения наблюдаемых величин в интервалах нескольких дней, недель или месяцев.

Часть систематических погрешностей в расчетах элементов орбиты примерно в одинаковой степени вносит искажения при определении всех точек, поэтому при определении их взаимного положения ошибки компенсируются. Поэтому относительные положения точек на земной поверхности обычно определяется с большой точностью.

Схема определения относительного положения пунктов по четырем ИСЗ дана на рис. 1.37.

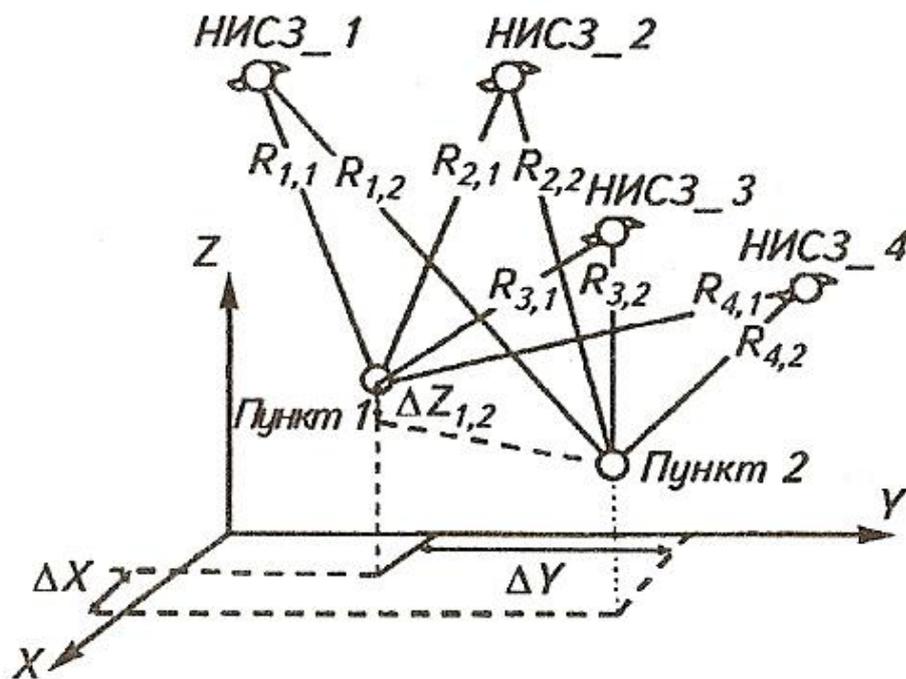


Рис. 1.37. Определение относительного положения пунктов

Положение пункта 2 относительно пункта 1 характеризуют приращения координат ΔX , ΔY и ΔZ между ними, при вычислении которых для обоих пунктов необходимо знать: пространственные прямоугольные координаты четырех ИСЗ (X_C , Y_C , Z_C); результаты измерений дальностей между фазовыми центрами антенн на пунктах 1 и 2 и соответствующими ИСЗ; приближенные пространственные прямоугольные координаты пункта 1.

Расстояние между j -м ИСЗ и i -м пунктом при $i=1$

$$R_{j1}^2 = (X_{Cj} - X_1)^2 + (Y_{Cj} - Y_1)^2 + (Z_{Cj} - Z_1)^2.$$

Для другого пункта ($i=2$) расстояние между ним и этим же j -м ИСЗ

$$R_{j2}^2 = (X_{Cj} - X_2)^2 + (Y_{Cj} - Y_2)^2 + (Z_{Cj} - Z_2)^2.$$

Вычитая из первого выражения второе, разность $R_{j1}^2 - R_{j2}^2$ можно представить в следующем виде:

$$(X_1 - X_j)\Delta X + (Y_1 - Y_j)\Delta Y + (Z_1 - Z_j)\Delta Z + l_1 = 0,$$

$$l_1 = 0,5[\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2 - (R_{j1} - R_{j2})(R_{j1} + R_{j2})].$$

В первом выражении неизвестны координаты первого пункта и значения трех приращений координат между первым и вторым пунктами. Если на обоих пунктах одновременно измерить расстояния до четырех ИСЗ, то аналогично последнему выражению можно составить четыре

соответствующие разности. Вычитая из первой разности последовательно три других, задачу сводим к решению трех уравнений

$$\begin{aligned}(X_0 - X_{c1})\Delta X + (Y_0 - Y_{c1})\Delta Y + (Z_0 - Z_{c1})\Delta Z + \Delta l_{2,1} &= 0; \\(X_0 - X_{c2})\Delta X + (Y_0 - Y_{c2})\Delta Y + (Z_0 - Z_{c2})\Delta Z + \Delta l_{3,1} &= 0; \\(X_0 - X_{c3})\Delta X + (Y_0 - Y_{c3})\Delta Y + (Z_0 - Z_{c3})\Delta Z + \Delta l_{4,1} &= 0,\end{aligned}$$

где X_0, Y_0, Z_0 – пространственные прямоугольные координаты одного из ИСЗ (в данном случае четвертого);

$\Delta l_{2,1}, \Delta l_{3,1}, \Delta l_{4,1}$ – свободные члены, вычисляемые по формулам:

$$\begin{aligned}\Delta l_{2,1} &= -0,5[(R_{2,1} + R_{1,1})(R_{2,1} - R_{1,1}) - (R_{2,2} + R_{2,1})(R_{2,2} - R_{2,1})]; \\ \Delta l_{3,1} &= -0,5[(R_{2,1} + R_{1,1})(R_{2,1} - R_{1,1}) - (R_{3,2} + R_{3,1})(R_{3,2} - R_{3,1})]; \\ \Delta l_{4,1} &= -0,5[(R_{2,1} + R_{1,1})(R_{2,1} - R_{1,1}) - (R_{4,2} + R_{4,1})(R_{4,2} - R_{4,1})].\end{aligned}$$

Решив данную систему уравнений, можно определить искомые приращения координат $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ и тем самым – положение второго пункта относительно первого.

Технологическая последовательность и режимы спутниковых измерений

Работы по развитию сети начинают с выбора мест расположения пунктов.

Следует стремиться к максимальному совмещению пунктов проектируемой сети с пунктами ранее созданных сетей; это позволит решить вопросы о преемственности существующих и вновь создаваемых сетей, а также нахождения параметров связи между местной системой координат и системой координат спутниковых определений. При выборе мест расположения пунктов следует использовать открытые места, расположенные около (вдоль) автодорог и в тоже время обеспечивающие сохранность пунктов в течение длительного времени. Не следует размещать пункты внутри тех или иных металлических ограждений, рядом с высокими зданиями, большими и густыми деревьями, а также другими сооружениями, способными экранировать прямое прохождение радиосигнала от ИСЗ. Наличие на пунктах наружных знаков в виде сигналов и пирамид является крайне нежелательным. Во избежании влияния многолучевости на точность спутниковых наблюдений не рекомендуется размещать пункты вблизи от различного рода отражающих поверхностей, при этом повышенному вниманию уделяют отражающим поверхностям в виде вертикальных стен зданий.

В процессе рекогносцировки и закладки пунктов рекомендуется сфотографировать место расположения пункта и сам пункт, а также

оформить специальную карточку с обязательным отражением в ней: названия пункта, описания местоположения пункта (ближайшие ориентиры); приближенные координаты и высоты (с точностью 10-15 м, это можно сделать с помощью навигационного приемника); условия подъезда к пункту и возможности доступа к нему (например, в случае расположения пункта на крыше здания); наличие препятствий для прохождения сигнала НИСЗ над горизонтом при углах возвышения (отсечки) более 10-15°.

Спутниковые наблюдения начинают с планирования наблюдений, которое выполняют с целью прогнозирования геометрических и иных параметров спутникового созвездия на момент проведения работ и на основании выработанных сведений определить моменты и временные интервалы, в которые условия наблюдений находятся в пределах установленных требований, основными из которых являются: продолжительность измерений; число одновременно наблюдаемых ИСЗ; угол отсечки; геометрический фактор PDOP. Планирование проводят по данным соответствующего альманаха полученного на дату, отстоящую не более чем за 30 суток от даты предполагаемых спутниковых наблюдений. При планировании должны быть учтены сведения об условиях наблюдений на данном пункте, полученные в процессе рекогносцировки пунктов опорной межевой сети. При планировании спутниковых наблюдений используют фирменные пакеты специального программного обеспечения.

Технологическая последовательность статических измерений регламентируется требованиями Инструкции и Основных положений, а также методикой спутниковых измерений, разработанной в ЦНИИГАиК.

Последовательность действий при измерении на пункте следующая:

1. Установка штатива над центром пункта (рис. 1.38).
2. Центрирование и горизонтирование подставки (трегера) антенны или лот-аппарата (рис. 1.39).



Рис. 1.38. Установка штатива над центром пункта



Рис. 1.39. Центрирование и горизонтирование

3. Соединение приемника кабелем с аккумулятором и антенной (рис. 1.40).

4. Установка антенны в подставку (трегер), проверка центрировки и ориентирование антенны относительно направления на север (рис. 1.41).



Рис. 1.40. Соединение антенны с приемником



Рис. 1.41. Проверка центрировки и ориентирование антенны на север

5. Измерение высоты антенны над центром пункта (рис. 1.42) производится с точностью 1 мм три раза (с трех сторон антенны) до и после завершения каждого сеанса наблюдений одним из предусмотренных способов (зависящих от типа антенны): до фазового центра; до контрольной точки антенны, до края корпуса антенны по схеме. В данном случае высота антенны измерялась до верхнего края средней плоскости корпуса антенны. Расхождение между измерениями не должны превышать 2 мм. За окончательное значение берется среднее арифметическое.



Рис. 1.42. Измерение высоты антенны



Рис. 1.43. Включение приемника

6. Включение приемника (рис. 1.43). При построении фрагмента спутниковой сети приемник должен работать в режиме статики. После включения необходимо дождаться пока приемник позиционируется, затем можно включать запись (в некоторых типах приемников включение

записи производится автоматически). Результаты наблюдений каждого сеанса записывается в отдельном файле, который имеет имя, содержащее дату, порядковый номер сеанса и день с начала года.

7. Фиксация в журнале спутниковых измерений (рис. 1.44):

Название пункта, фамилия наблюдателя, организация, наименование объекта наблюдений;

Дата, время начала сеанса, маска, дискретность, режим измерений;

Метеоданные (давление, температура)

Тип геодезического знака и центра (марки);

Схема смежных пунктов и названия файлов измерений;

Наличие препятствий;

Измеренные значения высоты антенны и схема ее измерения.

8. После окончания сеанса – выключение приемника, фиксация в журнале времени выключения приемника, троекратное измерение высоты антенны и запись ее значения в журнал.

Продолжительность сеанса зависит от расстояния между определяемым и исходным пунктами. При расстояниях до 20 км, рекомендуется проводить сеансы спутниковых наблюдений в режиме статики продолжительностью не менее 1 часа.

По окончании наблюдений переходят к математической обработке их результатов (в программном продукте, поставляемом вместе с оборудованием). В результате этого вычисляют координаты определяемых пунктов.

Журнал спутниковых наблюдений
(заполнение всех граф журнала обязательно)

Название пункта п.п. 7931 Обозначение (ID) 7931 Объект ВГС-2003
 Организация ЦНИГАиК Наблюдатель Докукин П.Ф.

Приближенные координаты		Дата наблюдений <u>27.07.2003г.</u>	
B = <u>7400000.312</u>		День от начала года	
L = <u>21517001.700</u>		№№ сеансов <u>1,2</u>	
H = <u>53.600 (III кл)</u>			
Тип и № приемника <u>"Орион" №0005</u>		Тип и № антенны <u>Mag Ant №0497</u>	

Тип и характеристика геодезического знака пункт полигонометрич
4 класса метал. пирамиды спилена
 Тип и характеристика центра (марки) выше уровня земли N 7931

Пункты, участвующие в сеансе:

Названия пунктов	Схема их расположения
<u>Асцо, 0330</u>	<u>○ Асцо</u>
	<u>□ 0330</u>

Имена файлов наблюдений 00050727a, v.jpg □ 7931

Время выполнения сеансов

Сеанс	Начало		Конец		Интервал (факт)
	План	Факт	План	Факт	
1	10 ^h 25 ^m	10 ^h 25 ^m	11 ^h 55 ^m	11 ^h 55 ^m	1 ^h 30 ^m
2	12 ^h 00 ^m	12 ^h 00 ^m	13 ^h 30 ^m	13 ^h 35 ^m	1 ^h 35 ^m

Дискретность <u>1D^s</u>	Метеопараметры	
Маска <u>10°</u>	Давление (мм.рт.ст.) _____	
Тип измерений <u>L1/L2 статичес</u>	T° сух. _____	
	T° влажн. _____	

Результаты привязки антенны (антенна-пункт)
 S= _____ A= _____ DN= _____
 DV= _____ DL= _____ DH= _____

Общий комментарий к измерениям на пункте
Во втором сеансе штатив был сломан, поэтому
проведены повторные наблюдения

Схема и характер экранирования

Схема расположения антенн - относительно центра, штатива, столба и др.

Условия наблюдений на пункте: Удовлетворительн
 (наличие препятствия, линий электропередач, радиолокационных станций, др.)
Днезт ем буром

Схема измерения высоты антенны

Сеансы	Измерение высоты антенны		Нестандартная схема измерений
	До вкл. приемника	После выключ.	
1	1.325	1.324	
1	1.324	1.323	
1	1.323	1.325	
Среднее	1.324	1.324	
2	1.268	1.268	
2	1.269	1.268	
2	1.268	1.269	
Среднее	1.268	1.268	

Окончательное значение высоты антенны: 1) 1.324 ; 2) 1.268
 Наклонная, вертикальная до _____
 (ненужное зачеркнуть)

Вычисление высоты по нестандартной схеме.

Подпись наблюдателя Докукин П.Ф.

Рис. 1.44. Журнал спутниковых наблюдений

В связи с понижением требований к точности определения положения объектов недвижимости по сравнению с требованиями к точности определения положения пунктов ОМС можно использовать и другие способы спутниковых наблюдений. Например, способ быстрой статики и реокупации.

Способы быстрой статики и реокупации являются модификациями статического способа и в отличие от последнего менее точными.. Так при использовании режима быстрой статики резко снижают продолжительность сеанса наблюдений (при одновременно «видимых» в местах установки обоих приемниках 5 ИСЗ сеанс наблюдений длится не более 15-20 минут, а при 6-ти ИСЗ – не более 10 минут), а режим реокупации предусматривает выполнение непрерывных в течении всего сеанса спутниковых наблюдений на одном пункте с известными координатами (базовая станция), а второй приемник, который сначала устанавливается на другом пункте с известными координатами и на нем выполняются спутниковые наблюдения в течение примерно 10 мин. Затем данный приемник переносят на определяемые точки. По истечении часа второй приемник возвращают на соответствующий исходный пункт и продолжают на нем спутниковые наблюдения. Т.о. непрерывность измерений на базовой станции сохраняется, а на подвижном приемнике они зафиксированы только в начале и в конце часового интервала.

При съемке объектов недвижимости также используют следующие способы (режимы) спутниковых наблюдений:

Кинематический режим, используемый при съемке объектов местности, предусматривает установку на пункте с известными координатами (базе) неподвижного в данном сеансе наблюдений одного приемника спутниковых сигналов, в то время как второй приемник, называемый ровер, непрерывно перемещается (не прерывая прием сигналов не менее 4 ИСЗ) .

Режим «stop&go» являющийся вариантом кинематического режима, предусматривает кратковременную (несколько минут) остановку на определяемой точке.

В настоящее время высокая эффективность использования при земельно-кадастровых работах кинематического способа достигается в процессе GPS-съемки объектов *в режиме кинематики реального времени* – RTK (Real Time Kinematics). Комплект оборудования для RTK-съемки, как правило, состоит из двух модифицированных двухчастотных приемников сигналов навигационных искусственных спутников земли с антеннами и полевыми контроллерами. Один из приемников устанавливают на базовом пункте с известными координатами, другой - выполняет роль ровера. Для получения координат в режиме реального времени в состав каждого приемника включают радиомодемы. В процессе съемки ровер переносят по определяемым точкам. Одновременно он принимает радиосигналы передаваемые с базовой станции и включающие в себя соответствующую служебную, в том числе - координаты станции, и измерительную информацию (результаты спутниковых наблюдений на базовой станции). По

ней и по результатам спутниковых наблюдений ровера его контроллер вычисляет сначала относительные, а потом и геодезические координаты точки установки ровера. В последующем, измеренные таким образом координаты места установки ровера могут быть преобразованы в местную или условную систему координат. В качестве радиоканала для передачи данных используется УКВ-диапазон, требующий наличие радиовидимости между базовой станцией и ровером (в равнинной местности до 10-15 км). Для этих же целей возможна передача данных по каналу GSM, работающего по принципу пакетной передачи данных (стандарт GPRS). Достоинствами GPS-съемки в режиме реального времени являются: во-первых, высокая производительность, так как на съемку каждого пикета затрачивается несколько секунд; во-вторых - высокое качество выполненных работ. Кроме того, исполнитель имеет возможность контролировать результаты съемки в процессе её выполнения, а также решать непосредственно в поле различные задачи, в том числе, определять расстояние между точками, площади земельных участков, выполнять вынос проекта в натуру и другие. К тому же, в камеральных условиях имеется возможность сразу после выполнения полевых работ сформировать цифровую модель местности.

Повышение точности абсолютных определений возможно путем использования дифференциального метода спутниковых наблюдений, который основан на учете при вычислении координат определяемой точки, так называемых, дифференциальных (разностных) поправок. В основе метода лежит относительное постоянство во времени и пространстве некоторых элементарных погрешностей, участвующих в формировании общей погрешности измерений абсолютного положения определяемых точек. Для реализации дифференциального метода глобальную навигационную спутниковую систему дополняют рядом технических средств, совокупность которых образует своеобразную подсистему. Эта дифференциальная подсистема не влияет на функционирование всей ГНСС в основном, стандартном её режиме, однако предоставляет пользователю возможность перейти при необходимости на работу в дифференциальном режиме. Так, например, система GPS, дополненная дифференциальной подсистемой, получила название DGPS (Differential Global Positioning System).

На рис. 1.45 показана структурная схема дифференциальной подсистемы, включающая базовую станцию и, устанавливаемого в определяемой точке, дополненного специальными устройствами, приемника спутниковых сигналов. В качестве базовой станции используют геодезический пункт с известными с заданной точностью координатами. Центром такого пункта часто является закрепленная на крыше здания антенна приемника спутниковых сигналов. При этом, координаты $X_{ст}$, $Y_{ст}$, $Z_{ст}$ центра пункта соотносят к положению фазового центра антенны. Сигналы навигационных искусственных спутников земли одновременно «видимых» на БС и определяемой точке воспринимаются соответствующими приемниками и накапливаются. В дальнейшем, на базовой геодезической станции соответствующие сигналы поступают в блок формирования

корректирующей информации. Основное назначение данного блока - вычисление корректирующих поправок и формирование кадра корректирующей информации, который по каналу связи с базовой станцией передается в приемник спутниковых сигналов, установленный на определяемом пункте. Переданными таким образом поправками корректируют результаты спутниковых наблюдений выполненных на определяемой точке и по этим данным вычисляют её координаты (для этого используют соответствующий вычислительный блок).

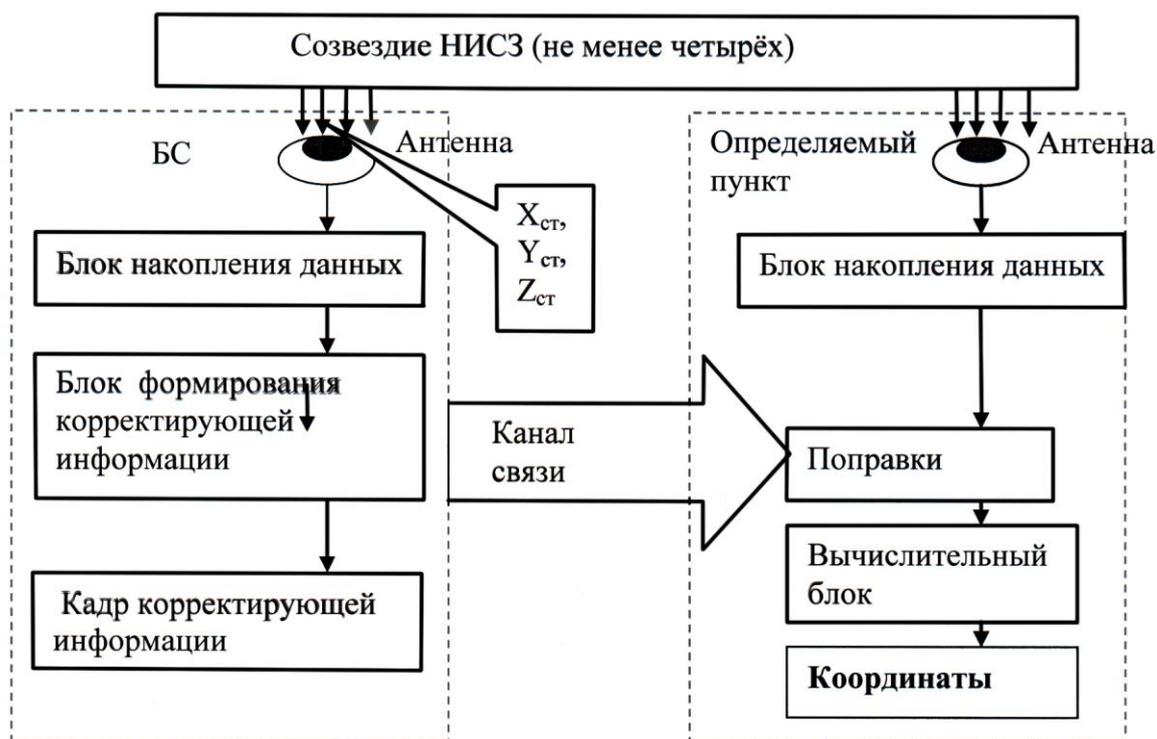


Рис.1.43. Структурная схема дифференциальной подсистемы

Примером дифференциальной подсистемы является создание, так называемых, спутниковых систем межевания земель развернутая в Московской и Ленинградской областях и состоящая из референчных станций с известными координатами, фазовых центров, установленных на них антенн спутниковых приемников, вычислительного центра, каналов связи и приборного пула. Референчные станции, расположены в капитальных зданиях находящихся на расстоянии 30-80 км один от другого. В помещениях, где находится электронная аппаратура связи и спутниковые приемники поддерживается заданный диапазон температур и имеется блок аккумуляторов, обеспечивающий автономную работу аппаратуры в течении суток при аварийном отключении электропитания. Вся аппаратура расположенная на референчной станции работает в автономном режиме и не требует постоянного присутствия операторов. В состав референчной станции входит двухчастотный приемник спутниковых сигналов, антенный блок которого (плоский диск, закрытый сферическим защитным колпаком)

закреплен на наружной стене здания и возвышаются над его крышей примерно на 1.5 м.

Результаты, выполняемых с дискретностью 1 сек, спутниковых наблюдений, всех «видимых» НИСЗ (системы ГЛОНАСС и GPS), вместе со служебной информацией передается по высокоскоростным радиорелейным и волоконно-оптическим линиям в вычислительный центр. Информация от референчных станций в вычислительный центр передается круглосуточно. Объем передаваемой информации - 1 Кбайт в сек.

В состав вычислительного центра системы входят: сервер для сбора измерительной информации, поступающей со всех референчных станций; сервер для архивирования информации; сервер для решения сетевых задач и формирования корректирующей информации, обеспечивающей определение местоположения определяемых точек непосредственно в поле в режиме реального времени; определенное количество высокоскоростных ПЭВМ для организации режима постобработки результатов спутниковых наблюдений.

Приборный пул включает в себя двухчастотные спутниковые приемники с GSM - модемами и полевые компьютеры с соответствующим программным обеспечением. Данное оборудование сдается в аренду пользователям системы, которые могут работать также с собственным оборудованием. Им же может быть предоставлена собранная на референчной станции измерительная информация. В этом случае, пользователь самостоятельно выполняет соответствующую постобработку выполненных спутниковых наблюдений. Число пользователей практически не ограничено.

Площадь территории обслуживаемой спутниковой системой межевания земель в Московской области составляет 50 тыс. км².

Требования к спутниковым измерениям при построении ОМС

При развитии ОМС сеть должна содержать не менее трех исходных пунктов, которые используют в качестве опорных (базовых). Основной фигурой при развитии сети является треугольник. Не рекомендуется создавать сеть так называемым полярным способом, при котором для создания сети используется один исходный пункт и два приемника. При этом, один из приемников устанавливается на исходный пункт, а второй последовательно перемещают по определяемым пунктам, на которых ведутся соответствующие спутниковые наблюдения в режиме статика.

Длина стороны сети должна быть не более 15 км при развитии для сети полигонометрии 4 класса и 5 км при развитии опорной межевой сети взамен полигонометрии 1 разряда (неависимо от класса опорной межевой сети длина стороны должна быть не менее 0,5 км)

На рис. 1.44 представлена одна из рекомендуемых схем развития опорной межевой сети с помощью спутниковых систем.

При развитии сети одновременно используют три приемника спутниковых сигналов. Исходными пунктами являются три пункта триангуляции 3 класса (пункты А, В и С).

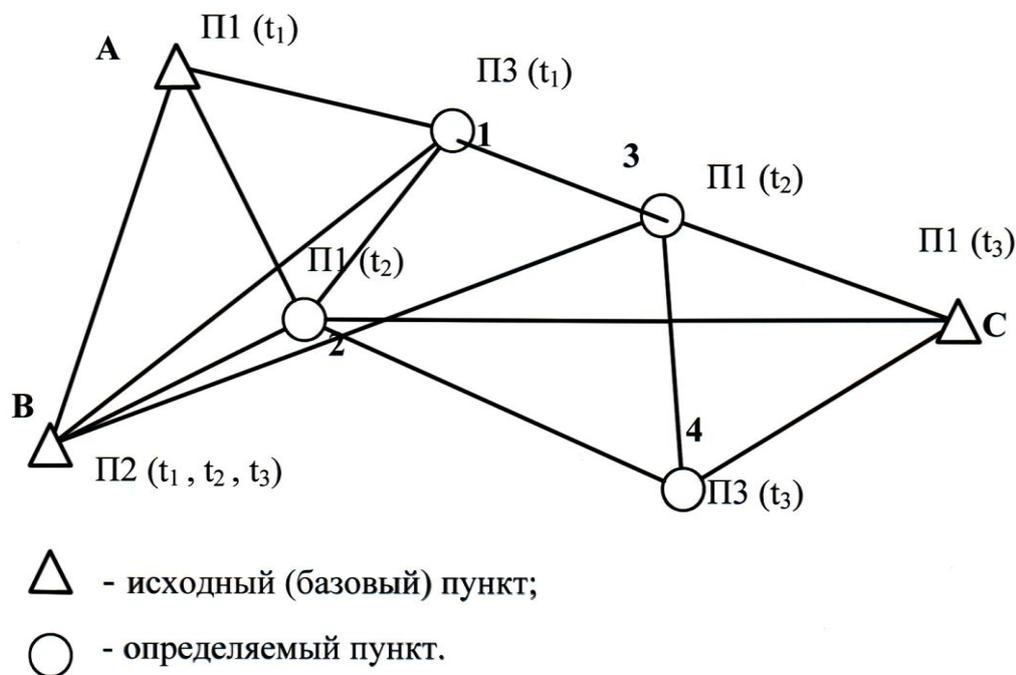


Рис. 1.46. Вариант схемы развития ОМС

В момент времени t_1 первый (П1) приемник, установленный на исходном (базовом) пункте (А) принимает сигналы НИСЗ. Одновременно, с помощью приемника П2, ведутся спутниковые наблюдения на другом исходном пункте (В) и приемником П3 на определяемом пункте (пункте 1). В дальнейшем, не прекращая прием сигналов на исходном пункте В, с помощью первого и третьего приемника, ведутся синхронные спутниковые наблюдения на других пунктах, перемещая указанные приемники таким образом, чтобы образовывались такие треугольники, в которых, одна из вершин которого является определяемым пунктом, а положение (координаты) двух других либо заданы (случай двух исходных пунктов), либо в дальнейшем могут быть вычислены по результатам предыдущих спутниковых наблюдений.

В общем случае, накопленный опыт развития ОМС позволяет сделать следующие рекомендации:

- в сети должно быть не менее трех исходных пунктов;
- одновременные наблюдения желательно предусматривать на 3-4 пунктах;

на каждом пункте должен быть предусмотрен достаточно продолжительный период наблюдений, конкретная продолжительность которого зависит от взаимной удаленности и требований к точности определения положения пунктов;

с целью выявления грубых промахов на каждом пункте следует спутниковые наблюдения проводить со всей тщательностью, особенно это касается измерений высот антенны;

продолжительность измерений при создании опорной межевой сети ОМС 1 должна быть не менее часа, а при развитии ОМС 2 – 40 минут;

число одновременно наблюдаемых одноименных навигационных искусственных спутников земли должно быть не менее пяти;

угол отсечки должен быть **не менее 15°**;

геометрический фактор PDOP должен **быть менее трех** на протяжении всего сеанса спутниковых наблюдений.